MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI MINTAFELADATOK

A 2024. JANUÁR 1-TŐL BEVEZETÉSRE KERÜLŐ VIZSGAKÖVETELMÉNYEK SZERINT

MINTAFELADATOK:

I. rész

1. Adott a következő két halmaz:
A = {egyjegyű pozitív számok} és B = {a 15-nél kisebb pozitív páros számok}.
Adja meg a következő halmazokat elemeik felsorolásával! *(4 pont)*

$$A \cap B =$$
$$B \setminus A =$$

2. Rajzoljon egy olyan hatpontú gráfot, amelyben minden csúcs fokszáma 3. *(2 pont)*

3. A 2021-es labdarugó EB-re készülő magyar válogatott keretbe 7 támadó játékost nevezett a szövetségi kapitány, közöttük van Szalai Ádám. Hányféleképpen lehet közülük 3 játékost kiválasztani a következő mérkőzésre, ha Szalai Ádám mindenképpen játszik? *(2 pont)*

4. Adja meg az összes olyan számot, amelyik egyenlő a reciprokával! *(2 pont)*

5. Adja meg a következő állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! *(2 pont)*

A: Ha két háromszögben a szögek nagysága egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.

B: Ha egy paralelogramma két átlója egyenlő hosszú, akkor a paralelogramma minden szöge ugyanakkora.

C: Ha egy hatszögnek minden oldala egyenlő hosszú, akkor a hatszög szabályos.

6. Írja fel a 2021-et 8-as számrendszerben! *(2 pont)*

7. Egy mértani sorozat második tagja 2, negyedik tagja 4. Adja meg a sorozat hatodik tagját! Válaszát indokolja! *(3 pont)*

8. Ábrázolja az [1; 4] zárt intervallumon értelmezett $x \mapsto |2x-4|$ függvényt! *(3 pont)*

9. Adja meg az 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 5 minta alsó és felső kvartilisét! *(2 pont)*

10. Egy hegyesszög koszinusza 0,6. Mennyi a kiegészítő szögének a koszinusza? *(2 pont)*

11. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely az y tengelyt a (0; 4), az x tengelyt pedig a (4; 0) pontban metszi! *(2 pont)*

12. Petra kezében van egy piros és egy sárga szabályos dobókocka. Az A esemény legyen az, hogy a piros kockával páros számot dob, a B esemény pedig az, hogy a sárga kockával legalább 5-öt dob. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két kockával egyszerre dobva mindkét esemény bekövetkezik? Megoldását részletezze! *(4 pont)*

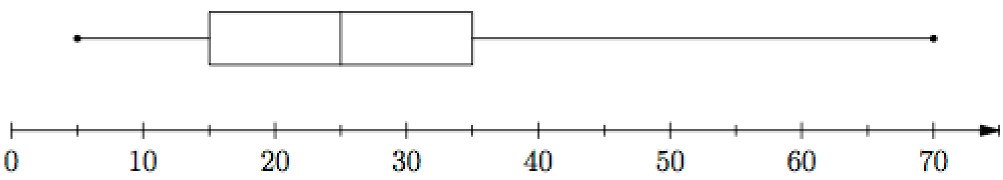
13. **a)** Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán! (*5 pont*)

$$3 \cdot 8^x = 48$$

b) Oldja meg a következő egyenlőtlenséget az **egész** számok halmazán! *(6 pont)*

$$(x + 2)^2 - 1 < x + 3$$

14. A diákok felmérést készítettek, hogy ki hány euró költőpénzt vitt magával az egynapos bécsi kirándulásra. A kapott eredményeket az alábbi box-plot diagram szemlélteti.



a) Töltse ki a táblázatot a megfelelő értékekkel a diagram alapján! *(3 pont)*

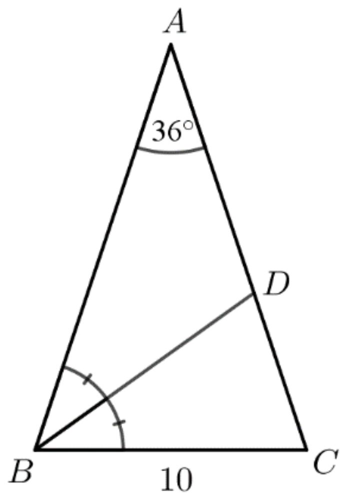
medián	.... euró
felső kvartilis	.... euró
a legnagyobb érték	.... euró

b) Adjon meg egy olyan, 11 adatból álló adathalmazt, amiből a fenti diagram elkészülhetett! *(4 pont)*

c) Az alábbi táblázatban szereplő állítások a fenti diagramra vonatkoznak. Tegyen X-et a táblázat megfelelő cellájába aszerint, hogy az állítás igaz, hamis, vagy a diagram alapján ezt nem lehet eldönteni! *(4 pont)*

	Igaz	Hamis	Az ábra alapján nem lehet eldönteni
Átlagosan kb. 25 euró volt a gyerekeknél.			
A gyerekek 75%-ánál volt legalább 35 és legfeljebb 70 euró.			
Volt olyan gyerek a megkérdezettek között, akinél 65 euró volt.			
A megkérdezett gyerekek felénél volt 25 és 35 euró közötti összeg.			

15. Az *ABC* háromszögben $AB = AC$, $BC = 10$ cm, valamint $BAC\angle = 36°$. A háromszög *B* csúcsánál lévő szög felezője az *AC* oldalt *D*-ben metszi (ld. ábra).



a) Bizonyítsa be, hogy a *BCD* háromszög és az *ABC* háromszög hasonló! *(4 pont)*

b) Bizonyítsa be, hogy az *AD* szakasz hossza 10 cm! *(4 pont)*

c) Számítsa ki az *ABC* háromszög kerületét és területét! *(6 pont)*

II. rész

A 16., 17. és 18. feladatok közül csak kettőt kell megoldani.

16. Az Aranypatkó nevű sorsjegyből 5 000 000 darabot készített egy szerencsejátékokat forgalmazó cég. Egy sorsjegy ára 300 Ft. Az alábbi táblázat azokat a nyereményösszegeket és az egyes összegek darabszámát mutatja, amelyeket a vásárlás után meg lehet nyerni. A többi szelvénnyel nem lehet nyerni. (Például 6000 darab olyan sorsjegy kerül forgalomba, mellyel 10 000 Ft-ot lehet nyerni.)

Sorsjegy (db)	Nyeremény
3	10 000 000 Ft
5	1 000 000 Ft
6 000	10 000 Ft
20 000	5 000 Ft
30 000	1 500 Ft
100 000	1 000 Ft
50 000	800 Ft
650 000	500 Ft
750 000	300 Ft

a) Tekintsük a cég egy sorsjegyre eső nyereségének a sorsjegy árának és az egy sorsjegyre jutó várható nyereménynek a különbségét. Mennyi egy sorsjegyet tekintve a cég nyereségének várható értéke a sorsjegy kibocsátásakor? *(5 pont)*

Gyuri vett valahány Aranypatkó sorsjegyet. A megvásárolt sorsjegyek 10%-án 300 Ft-os, egynyolcad részén 500 Ft-os nyeremény szerepelt. A sorsjegyek között volt két darab 1000 Ft-os nyeremény is. A többi sorsjegy nem nyert. Az összes nyeremény a sorsjegyek árának 47,5%-át tette ki.

b) Hány sorsjegyet vásárolt Gyuri? *(7 pont)*

Péter vásárolni szeretne egy Aranypatkó sorsjegyet. Egy 200 Ft-ost talál az egyik zsebében, azt kiveszi. Tudja, hogy a másik zsebében 5 darab 10 Ft-os és 7 darab 50 Ft-os van, melyek közül véletlenszerűen kivesz két érmét (visszatevés nélkül).

c) Adja meg annak a valószínűségét, hogy pont ki tudja fizetni a 300 Ft-os sorsjegy árát! *(5 pont)*

17. Egy bank évi 4%-os kamatos kamatot biztosít hosszú távon a lekötött betétekre. (A kamatot évente egyszer, az év végén írják jóvá.)

a) 100 000 Ft-ot helyezünk el ilyen feltételekkel a bankban. Hány forintra nő ez az összeg 5 teljes év elteltével? *(3 pont)*

Dóri szülei elhatározzák, hogy most született gyermekük felsőoktatási tanulmányainak fedezésére 18 éven keresztül minden év elején elhelyeznek 100 000 Ft-ot a fenti kamatfeltétellel egy számlára.

b) Mutassa meg, hogy ilyen módon a 18. év végére több mint 2 600 000 Ft lesz a számlán! *(7 pont)*

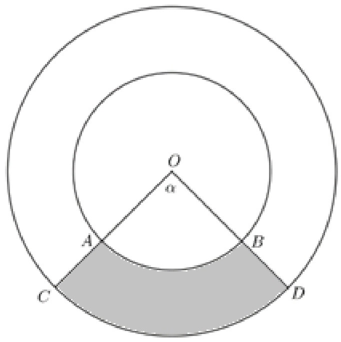
Dóri egyetemi évei alatt tanulmányai költségeire szeretne felhasználni az összegyűlt pénzből 2 600 000 Ft-ot. Azt tervezi, hogy hat éven keresztül minden év elején ugyanakkora összeget vesz fel egy olyan számláról, melyen kezdetben ez az összeg szerepel (a számlán maradó összeg továbbra is minden év végén 4%-ot kamatozik). Az a célja, hogy amikor a hatodik év elején felveszi az adott összeget, akkor pont elfogyjon a számláról a 2 600 000 Ft.

c) Mekkora összeget vegyen fel Dóri minden év elején, hogy a célja teljesüljön? Válaszát száz forintra kerekítve adja meg! *(7 pont)*

18. Egy téglatest alakú szoba méretei méterben mérve: $2{,}5 \times 3 \times 2{,}75$. A szoba mennyezetéről egy csonkakúp alakú lámpabúra lóg. A búra alapkörének átmérője 50 cm, a fedőkör átmérője 30 cm, az alkotó 40 cm hosszú. A szobában egy légy repked teljesen véletlenszerűen (Tekinthetjük úgy, hogy egy adott pillanatban a légy a szoba bármely pontjában ugyanakkora valószínűséggel tartózkodik).

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy adott pillanatban a légy a lámpabúra belsejében tartózkodik? *(8 pont)*

Tekintsünk egy olyan lámpabúrát, amelynek alakja és méretei megegyeznek a fent leírtakkal. Ennek a lámpabúrának a palástját egy körgyűrű alakú anyagból vágják ki (A palást az ábrán a satírozott *ACDB* síkidom. Az anyagveszteségtől eltekintünk.)



b) Mekkora a körgyűrűt határoló kisebb kör *OA* sugara, és mekkora a körgyűrű középpontjánál jelzett α szög nagysága? *(9 pont)*

MEGOLDÁSOK:

1.		
$A \cap B = \{2; 4; 6; 8\}$	2 pont	
$B \setminus A = \{10; 12; 14\}$	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2.		
Egy megfelelő gráf.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

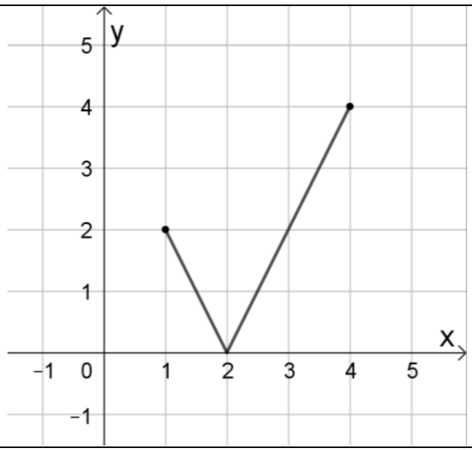
3.		
$\binom{6}{2} = 15$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4.		
1 és –1	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
A: hamis **B:** igaz **C:** hamis	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6.		
3745_8	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
A megadott adatok alapján a sorozat hányadosára $q^2 = 2$.	1 pont	
Így a sorozat hatodik tagja $4 \cdot 2 = 8$.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8.		
	3 pont	*1 pont jár a* $2x-4$ *függvény helyes ábrázolásáért.*
Összesen:	**3 pont**	

9.		
Alsó kvartilis: 1,5	1 pont	
Felső kvartilis: 3	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

10.		
– 0,6	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

11.		
(Az egyenes meredeksége –1, így egyenlete) $y=-x+4$.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

12. első megoldás		
$P(A)=\frac{1}{2}$	1 pont	
$P(B)=\frac{1}{3}$	1 pont	
(Mivel a két esemény független, ezért) $P(AB)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

12. második megoldás		
A két kockával dobva az összes lehetséges eset száma 36.	1 pont	
Ezek közül kedvező az, amikor a piros kockával 2-t, 4-et vagy 6-ot dobok és a sárga kockával 5-öt vagy 6-ot dob,	1 pont	
ez összesen $3 \cdot 2 = 6$ lehetőség (kedvező esetek száma).	1 pont	
A kérdéses valószínűség $\frac{6}{36}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

13. a)		
Az egyenlet mindkét oldalát elosztva 3-mal: $8^x = 16$.	1 pont	
$2^{3x} = 2^4$	1 pont	$x = \log_8 16 =$
(Az exponenciális függvény egyértelműsége miatt) $3x = 4$.	1 pont	$= \frac{\lg 16}{\lg 8}$
$x = \frac{4}{3}$	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó kerekített értékkel válaszol.*
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. b) első megoldás		
A zárójelet felbontva: $x^2 + 4x + 4 - 1 < x + 3$.	1 pont	
Az egyenlőtlenséget rendezve: $x^2 + 3x < 0$.	1 pont	
A másodfokú kifejezés gyökei: $x_1 = 0$, $x_2 = -3$.	1 pont	
Az $x \mapsto x^2 + 3x$ függvény (vázlatos) ábrázolása alapján (a parabola „felfelé” nyitott) az egyenlőtlenség megoldása: $-3 < x < 0$.	2 pont	
Az egyenlőtlenség egész megoldásai: -2 és -1.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

13. b) második megoldás		
Az $x \mapsto (x + 2)^2 - 1$ függvény ábrázolása koordinátarendszerben.	3 pont	
Az $x \mapsto x + 3$ függvény ábrázolása ugyanabban a koordinátarendszerben.	1 pont	
Az egyenlőtlenség egész megoldásai: -2 és -1.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

14. a)		
medián: 25 (euró)	1 pont	
felső kvartilis: 35 (euró)	1 pont	
legnagyobb érték: 70 (euró)	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. b)		
A nagyság szerint sorbarendezett adatok között az első 5, a harmadik 15, a hatodik 25, a kilencedik 35, a tizenegyedik 70.	2 pont	
(A többi adat a nagyság szerinti sorrendet figyelembe véve tetszőlegesen megadható, így) egy lehetséges adatsokaság: 5; 8; 15; 17; 22; 25; 25; 31; 35; 40; 70.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. c)		
Átlagosan 25 euró volt a gyerekeknél: nem lehet eldönteni.	1 pont	
A gyerekek 75%-ánál volt legalább 35 és legfeljebb 70 euró közötti összeg: hamis.	1 pont	
Volt olyan gyerek a megkérdezettek között, akinél 65 euró volt: nem lehet eldönteni.	1 pont	
A megkérdezett gyerekek felénél volt 25 és 35 euró közötti összeg: hamis.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. a)		
$ACB\angle = CBA\angle = (180° - 36°) : 2 = 72°$	2 pont	
Így $CBD\angle = 36°$.	1 pont	
Azaz a BCD és az ABC háromszögekben 2-2 szög egyenlő, így a két háromszög valóban hasonló.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. b)		
Az a) feladat állítása (vagy a BCD és BDC szögek egyenlősége) alapján a BCD háromszög egyenlőszárú, így $BD = 10$.	2 pont	
Mivel $ABD\angle = 36° = BAD\angle$, így az ABD háromszög is egyenlőszárú, így $AD = 10$ valóban.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. c)		
Az AB oldal hosszára: $\sin 18° = \frac{5}{AB}$,	2 pont	
amiből $AB \approx 16{,}18$ (cm).	1 pont	
A háromszög kerülete $2 \cdot 16{,}18 + 10 = 42{,}36$ cm.	1 pont	
A háromszög területe $\frac{16{,}18 \cdot 16{,}18 \cdot \sin 36°}{2} \approx$	1 pont	*A BC oldalhoz tartozó magasság hossza kb.* 15,39 cm.
$\approx 76{,}94$ cm^2.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. a) első megoldás		
Az egyes nyereményösszegek megnyerésének valószínűsége rendre: 0,0000006; 0,000001; 0,0012; 0,004; 0,006; 0,02; 0,01; 0,13; 0,15.	2 pont	
A nyeremény várható értéke: $0{,}0000006 \cdot 10\,000\,000 + ... + 0{,}15 \cdot 300 = 186$ (Ft).	2 pont	
Az egy sorsjegyre jutó várható nyereség: 300 – 186 = 114 Ft.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

16. a) második megoldás		
A bevétel az összes sorsjegy eladása esetén: $5\,000\,000 \cdot 300 = 1500$ millió Ft.	1 pont	
A kiadás (az összes nyeremény összege): $3 \cdot 10\,000\,000 + 5 \cdot 1\,000\,000 + ... + 750\,000 \cdot 300 =$ = 930 millió Ft.	2 pont	
A nyereség: 1500 – 930 = 570 millió Ft.	1 pont	
Az egy sorsjegyre jutó nyereség várható értéke: $\frac{570\,000\,000}{5\,000\,000} = 114$ Ft.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

16. b)		
A megvásárolt sorsjegyek számát n-nel jelölve a sorsjegyek ára (forintban) összesen $300n$,	1 pont	
a nyeremény: $0{,}1n \cdot 300 + 0{,}125n \cdot 500 + 2000$.	2 pont	
A feladat szövege alapján: $0{,}1n \cdot 300 + 0{,}125n \cdot 500 + 2000 = 0{,}475 \cdot 300n$.	1 pont	
Rendezve: $2000 = 50n$.	1 pont	
Az egyenlet megoldása: $n = 40$, tehát 40 sorsjegyet vett Gyuri.	1 pont	
Ellenőrzés a szövegbe helyettesítve.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

16. c)		
Akkor tud pontosan kifizetni egy sorsjegyet, ha két 50 Ft-ost húz ki a zsebéből.	1 pont	
A kedvező esetek száma $\binom{7}{2}$.	1 pont	
Az összes eset száma $\binom{12}{2}$.	1 pont	
A kérdéses valószínűség ezek hányadosa, azaz $\frac{21}{66} \approx 0{,}32$.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

17. a)		
5 év alatt évi 4%-os kamattal $100\,000 \cdot 1{,}04^5 \approx$	2 pont	
$\approx$ 121 665 forintra nő a betett összeg.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. b)		
Az egyes évek végén a számlán szereplő összeg: 1.: $100\,000 \cdot 1{,}04$ 2.: $100\,000 \cdot 1{,}04^2 + 100\,000 \cdot 1{,}04$ 3.: $100\,000 \cdot 1{,}04^3 + 100\,000 \cdot 1{,}04^2 + 100\,000 \cdot 1{,}04$ … 18.: $100\,000 \cdot 1{,}04^{18} + 100\,000 \cdot 1{,}04^{17} + \ldots + 100\,000 \cdot 1{,}04$	3 pont	
Ez utóbbi egy olyan mértani sorozat első 18 tagjának az összege, mely sorozat első tagja $100\,000 \cdot 1{,}04$, hányadosa 1,04.	2 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó helyesen kiszámolja az összeg tagjait.*
A kérdéses összeg $100\,000 \cdot 1{,}04 \cdot \frac{1{,}04^{18} - 1}{1{,}04 - 1} \approx$	1 pont	
$\approx$ 2 667 100, tehát valóban több mint 2 600 000 Ft lesz a számlán.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

17. c)		
Jelölje az egyes évek elején a számláról felvett összeget forintban *x*. Az egyes évek végén a számlán szereplő összeg: 1.: $(2600000-x)\cdot 1{,}04$ 2.: $((2600000-x)\cdot 1{,}04-x)\cdot 1{,}04=$ $=2600000\cdot 1{,}04^2-x\cdot 1{,}04^2-x\cdot 1{,}04$ … 5.: $2600000\cdot 1{,}04^5-x\cdot 1{,}04^5-...-x\cdot 1{,}04$	3 pont	
A feladat feltételei alapján ez az utolsó összeg éppen *x*, tehát megoldandó a következő egyenlet: $2600000\cdot 1{,}04^5-x\cdot 1{,}04^5-...-x\cdot 1{,}04=x$.	1 pont	
Átrendezve: $3163300=x\cdot\frac{1{,}04^6-1}{1{,}04-1}\approx 6{,}633x$.	2 pont	
Ebből $x = 476\,900$ Ft a kért kerekítéssel.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

18. a)		
A szoba térfogata $2{,}5\cdot 3\cdot 2{,}75=20{,}625\,\mathrm{m}^3$.	1 pont	
A lámpabúra *m* magasságára (centiméterben mérve) a Pitagorasz-tétel alapján: $m^2+10^2=40^2$,	1 pont	
amiből $m \approx 38{,}7$ (cm).	1 pont	
A lámpabúra térfogata $\frac{38{,}7\cdot\pi}{3}\cdot\left(25^2+25\cdot 15+15^2\right)\approx$ $\approx 50\,000\ \mathrm{cm}^3$.	2 pont	
A két mennyiséget közös mértékegységben fejezzük ki ($50\,000\ \mathrm{cm}^3 = 0{,}05\ \mathrm{m}^3$ vagy $20{,}625\ \mathrm{m}^3 =$ $= 20\,625\,000\ \mathrm{cm}^3$).	1 pont	
A kérdéses valószínűség (a geometriai valószínűség modelljét használva) a két térfogat hányadosa, azaz $\frac{0{,}05}{20{,}625}\approx 0{,}0024$.	2 pont	
Összesen:	**8 pont**	

18. b)		
Az ábrán a (rövidebb) *AB* ív a csonkakúp fedőkörének kerülete, a (rövidebb) *CD* ív az alapkör kerülete. Így a (rövidebb) *AB* ív hossza (centiméterben) 30π, a (rövidebb) *CD* ív hossza 50π.	2 pont	
A körgyűrű magassága a csonkakúp alkotója, vagyis $AC = BD = 40$ (cm).	1 pont	
A kérdéses sugarat (centiméterben) jelölje r, ekkor (az *OAB* és *OCD* körcikkek hasonlósága miatt) $\frac{r}{30\pi} = \frac{r+40}{50\pi}$,	2 pont	
amiből $r = 60$ (cm).	1 pont	
A rövidebb *AB* ívhossz negyede a 60 cm sugarú kör kerületének,	2 pont	$\frac{\alpha}{360°} = \frac{30\pi}{120\pi}$
amiből a kérdéses szög: $\alpha = 90°$.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	