

Tartalomjegyzék

Bevezető	2
1. Gyakorlatok	3
1.1. Műveletek törtekkel, hatványokkal, gyökökkel	3
1.2. A logaritmus fogalma; arány- és százalékszámítás	6
1.3. Elemi függvények tulajdonságai, ábrázolásuk	8
1.4. Algebrai egyenletek és egyenlőtlenségek	10
1.5. Gyökös, exponenciális, logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek	12
1.6. Trigonometrikus azonosságok és egyenletek	15
1.7. Sorozatok; egyenletrendszerek	17
1.8. Koordináta geometria	21
1.9. Síkidomok kerülete, területe; testek	23
2. Megoldások	26
2.1. Műveletek törtekkel, hatványokkal, gyökökkel	26
2.2. A logaritmus fogalma; arány- és százalékszámítás	31
2.3. Elemi függvények tulajdonságai, ábrázolásuk	35
2.4. Algebrai egyenletek és egyenlőtlenségek	41
2.5. Gyökös, exponenciális, logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek	46
2.6. Trigonometrikus azonosságok és egyenletek	54
2.7. Sorozatok; egyenletrendszerek	61
2.8. Koordináta geometria	66
2.9. Síkidomok kerülete, területe; testek	71
3. Nehezebb feladatok	77
3.1. Feladatok	77
3.2. Megoldások	80

1. fejezet

Gyakorlatok

1.1. Műveletek törtekkel, hatványokkal, gyökökkel

Határozza meg az alábbi kifejezések értékét segédeszközök használata nélkül!

1.1. Feladat $3[(-2) - (-3)] + (-2)(-3)$

1.2. Feladat $\frac{4\{[(2-3) \cdot 5 + 4] \cdot 2 + 3\} + 10}{7}$

1.3. Feladat $\left[\left(\frac{3(7+2) - 8}{-3} + 7 \right) \cdot 2 \right] : \frac{-6}{(-3)(-2)}$

1.4. Feladat $6^{-3} \cdot (-2)^5 \cdot 12^{-1} \cdot (-3)^4$

1.5. Feladat $\frac{26^{-4} \cdot 25^{-4}}{60^{-8}} + \left[\left(\frac{1}{1024} \right)^{\frac{1}{5}} \right]^{-\frac{3}{2}}$

1.6. Feladat $\left(\frac{1}{6} \right)^{-\frac{2}{3}} : \left(\frac{36}{125} \right)^{-\frac{2}{3}} + \left(8^{-\frac{1}{3}} \right)^{-2}$

1.7. Feladat $\left(\frac{12^4 \cdot 5^5}{3^4} : \frac{2^7 \cdot 55^6}{(-11)^6} \right)^{-2}$

Írja fel prímszámhatványok szorzataként az alábbi kifejezéseket!

1.8. Feladat $24^2 \cdot 42^3 \cdot 12^2 \cdot 28 \cdot 18^3$

1.9. Feladat $\frac{3^5 \cdot 8^5 \cdot 20^4 \cdot 49}{16^4 \cdot 6^4 \cdot 70^2}$

Számolja ki az alábbi kifejezések értékét segédeszköz használata nélkül!

1.10. Feladat $\frac{2^{10} + 2^{11} - 2^{12}}{2^9 + 2^{10}}$

1.11. Feladat $\frac{1,6 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^{-2}}$

1.12. Feladat $\frac{360000 \cdot 0,0000025}{0,009}$

1.13. Feladat $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}}$

1.14. Feladat $\left(\sqrt{16 + 2\sqrt{55}} - \sqrt{16 - \sqrt{220}} \right)^2$

Rendezze növekvő sorrendbe az alábbi számokat!

1.15. Feladat $A = -10^3; B = \ln 5; C = \lg 100; D = -\frac{7}{8}$

1.16. Feladat $A = 2^{\frac{2}{3}}; B = 4^{-\frac{1}{3}}; C = 25^{\frac{1}{2}}; D = \frac{5}{100}; E = \sqrt{8}; F = \sqrt[3]{27}$

1.17. Feladat $A = \sin 60^\circ; B = \operatorname{tg} 45^\circ; C = \cos 45^\circ; D = \operatorname{ctg}(-45^\circ); E = \cos 135^\circ$

1.18. Feladat $A = \sqrt{(-3)^2}; B = \sin \frac{7\pi}{3}; C = \log_3 \frac{1}{9}$

1.19. Feladat

$$A = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}; B = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}; C = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}; D = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

1.20. Feladat $\left(\sqrt{a^5 \cdot \sqrt[5]{a^2}} \right) \cdot \left(\sqrt{a^5 \cdot \sqrt[5]{a^2}} \right) : \frac{\sqrt[5]{a \cdot \sqrt[3]{a}}}{\sqrt[3]{a^2}} \quad (a > 0)$

1.21. Feladat $\frac{(-2)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\sqrt[3]{64}\right)^n + 16^{\frac{n}{2}}}$

1.22. Feladat $\frac{9^{\frac{n}{2}+1} + (\sqrt{3})^{2n+2}}{36^{\frac{n}{2}} + (\sqrt{6})^n \cdot (\sqrt{3})^n \cdot (\sqrt{2})^n}$

$$1.23. \text{ Feladat } \frac{16^{\frac{n}{2}} - 2^{2n+3}}{125^{\frac{n}{3}} + (\sqrt{5})^{2n+2}}$$

$$1.24. \text{ Feladat } \frac{a-b}{(a+b)^2} \cdot \sqrt{\frac{(a^2-b^2)^6}{(a-b)^{10}}} \quad (a \neq \pm b)$$

$$1.25. \text{ Feladat } \frac{x^2}{x^2-8x+16} \cdot \frac{25-x^2}{5x-x^2} \cdot \frac{x^2-16}{(5+x)(4+x)} \quad (x \neq 0, \pm 4, \pm 5)$$

$$1.26. \text{ Feladat } \frac{1 - \frac{x^2}{x^2-1}}{2 + \frac{3x-1}{1-x}} \quad (x \neq \pm 1)$$

$$1.27. \text{ Feladat } \frac{x-4}{x+4} - \frac{x+4}{x-4} + \frac{16x}{x^2-16} \quad (x \neq \pm 4)$$

$$1.28. \text{ Feladat } \left(\frac{2}{x^2-x} - \frac{2x}{1-x^2} \right) \cdot \frac{2x^2+2x}{x^3-1} + \frac{4}{x-1} \quad (x \neq 0, \pm 1)$$

$$1.29. \text{ Feladat } \left(\frac{2c}{c+2} - \frac{2c}{3c-6} + \frac{8c}{c^2-4} \right) \cdot \frac{c-2}{c^2-4c} \quad (x \neq 0, \pm 2, 4)$$

$$1.30. \text{ Feladat } \sqrt{x \cdot \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{x}} \quad (x > 0)$$

$$1.31. \text{ Feladat } \sqrt{x^{-1} \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}} \quad (x > 0)$$

$$1.32. \text{ Feladat } \sqrt{\frac{x}{\sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x}}}} \quad (x > 0)$$

$$1.33. \text{ Feladat } \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}} - \sqrt{x \cdot \sqrt[12]{x}} \quad (x > 0)$$

1.2. A logaritmus fogalma; arány- és százalékszámítás

Rendezze növekvő sorrendbe az alábbi kifejezéseket segédeszköz használata nélkül!

1.1. Feladat $A = \lg \sqrt[3]{1000}$; $B = \log_2 0,25$; $C = \log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; $D = \ln \frac{1}{e^4}$

1.2. Feladat $A = \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_{\sqrt{3}} 5}$; $B = 0,25^{\log_2 3}$; $C = 3^{\log_{\frac{1}{3}} 2}$

1.3. Feladat $A = 3^{2-\log_3 10}$; $B = (\sqrt{2})^{3-\log_2 5}$; $C = 8^{\log_2 6-2}$

1.4. Feladat $A = (\lg 1,2 + \lg 1,5 - \lg 0,9)$; $B = (2 \ln 5 - 2)$; $C = \left(3 \log_2 8 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 16\right)$

1.5. Feladat Fejezze ki A -t az következő kifejezésből: $q = \frac{\lg A - \lg C}{\lg 5}$.

1.6. Feladat Fejezze ki q -t az következő kifejezésből: $2^p \cdot 5^q = 10$.

Számolja ki az alábbi kifejezések értékét segédeszköz használata nélkül!

1.7. Feladat $\sqrt{25^{1-\log_5 10}} + \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^{\lg 9-2}$

1.8. Feladat $49^{1-\log_7 2} - 5^{-\log_5 4} + \sin \frac{34\pi}{3}$

1.9. Feladat $(\sin 60^\circ)^{\sqrt[3]{8}} + \frac{3^{10} + 3^{11}}{3^{12} - 3^{10}} + \left(\frac{1}{49}\right)^{\log_{\sqrt{7}} 2}$

1.10. Feladat $(-\cos 30^\circ)^{\sqrt[3]{-8}} + 5000000 \cdot 0,000002 + 0,25^{\log_{16} 25}$

1.11. Feladat $-0,04^{-\frac{1}{2}} + 100^{\lg 5} - 81^{-\frac{3}{4}}$

1.12. Feladat $3^{1+\log_9 4 - \log_{\frac{1}{3}} 5} + \frac{2}{10^{-\lg 3}}$

1.13. Feladat Egy kocka éleit 1 cm-rel növeljük, így a térfogat értéke az eredeti felszín értékének $\frac{7}{6}$ -ával nő. Mekkora volt a kocka éle?

1.14. Feladat *A ló 1 hónap alatt eszik meg egy kocsi szénát, a kecske 2 hónap alatt, a juh 3 hónap alatt. Hány hónap alatt eszik meg egy kocsi szénát a ló, a kecske és a juh együtt?*

1.15. Feladat *80000 Ft-ot beteszünk a bankba 10%-os évi kamat mellett. Mennyi pénzünk lesz 5 év múlva?*

1.16. Feladat *Egy csoport 40 hallgatójának 30%-a kék szemű és 40%-a szőke. Tudjuk, hogy a kék szemű hallgatók $\frac{3}{4}$ -e szőke. Hány olyan hallgató van, aki se nem szőke, se nem kék szemű?*

1.17. Feladat *Két betét, amelyek közül az első kétszer akkora, mint a második, évente 6325 eurót kamatozik. A kamatláb a nagyobb, illetve a kisebb betétre 4%, illetve 3,5%. Mekkora volt a két betét értéke?*

1.18. Feladat *Egy 50 cm sugarú kör sugarát 10 cm-rel csökkentjük. Hány százalékkal csökken a területe?*

1.19. Feladat *Legyen $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, $x > 0$. Hány százalékkal változik az f függvény értéke, ha az $x = 1$ értékét*

1. 2%-kal növeljük;

2. 3%-kal csökkentjük?

1.20. Feladat *Legyen $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, $x > 0$. Hány százalékkal kell növelni, illetve csökkenteni az $x = 1$ értékét, ha azt szeretnénk, hogy az f függvény értéke*

1. 1%-kal nőjön;

2. 2,5%-kal csökkenjen?

1.21. Feladat *Egy gép értéke évente 20%-kal csökken. Két év használat után a gépet akkori értékének $\frac{3}{4}$ -ért eladták. Az eredeti értékének hány százalékaért jutott az új tulajdonos a géphez?*

1.22. Feladat *Fényszűrő lemezeket raknak egymás mögé. Az első elnyeli a ráeső fényenergia 30%-át, a második a ráeső fényenergia 50%-át, a harmadik pedig a ráeső energia 20%-át. A három lemez együttesen az eredeti fénysugár energiájának hány százalékát nyeli el?*

1.23. Feladat Egy üzem kétféle minőségű terméket gyárt. Az I. osztályú termék gyártásából származik a bevétel 80%-a. Hogyan változik az üzem bevétele, ha az I. osztályú termék termelését 20%-kal növelik, a II. osztályú termék termelését 20%-kal csökkentik?

1.24. Feladat Egy kabát árát 20%-kal csökkentették. Hány százalékkal kell emelni ennek a kabátnak az új árát, hogy újra az eredeti árát kapjuk?

1.25. Feladat Egy fenyőerdő faállománya jelenleg 8000 fa. Minden évben kivágják az állomány 20%-át, de ültetnek 800 új fát is. Feltéve, hogy az állomány egyéb okból nem változik, hány fából állt a faállomány két évvel ezelőtt?

1.26. Feladat Lola, az elefánt, ha nagyon szomjas, akkor testtömegének 84%-a víz. Itatás után 1600 kg-ot nyom, és ekkor testtömegének 85%-a víz. Hány kg-os Lola, amikor nagyon szomjas?

1.3. Elemi függvények tulajdonságai, ábrázolásuk

1.1. Feladat Rajzolja fel az $f(x) = 1 - \frac{2x}{x+5}$ függvény képét! Milyen x esetén lesz $f(x) > 0$? Hol metszi az f függvény az y tengelyt? Adja meg $f(1) + f(-1)$ értékét!

1.2. Feladat Rajzolja fel az $f(x) = 3^x$ és $g(x) = 3^{-x}$ függvények képeit! Adja meg $f(a+2) - f(a-2)$ és $g(a+2) - g(a-2)$ értékeit! Határozza meg az $f(g(x))$ és a $g(f(x))$ függvényeket!

1.3. Feladat Rajzolja fel az $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \sin \frac{x}{2}$ és $h(x) = |x - \pi|$ függvények képeit! Ezek közül melyik függvény lesz szigorúan monoton növekvő a $]0; \pi[$ nyílt intervallumon?

Adja meg az alábbi függvények zérushelyeit és értelmezési tartományát!

1.4. Feladat $f(x) = \frac{2x(x-2)^2 - 2(x-2) \cdot x^2 \cdot 2}{(x-2)^4}$

1.5. Feladat $f(x) = \frac{4(x^2-1) \cdot x \cdot x^3 - 3x^2 \cdot (x^2-1)^2}{x^6}$

1.6. Feladat $f(x) = \frac{2x(x^2-4)^2 + 2(x^2-4) \cdot 3x \cdot x^2}{(x^2-4)^4}$

1.7. Feladat $f(x) = \frac{3x^2(x-3)^2(x+1)^2 - (3x^2-9x)(x^2-1)^2}{(x-3)^4(x+1)^2}$

1.8. Feladat Legyen $f(x) = \ln^2 x$ és $g(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$. Mivel egyenlő $f(g(x))$, $f(g(0))$, $g(f(x))$ és $g(f(1))$?

1.9. Feladat Legyen $f(x) = e^{x^2}$ és $g(x) = \sin 3x$. Mivel egyenlő $f(g(x))$, $f(g(0))$, $g(f(x))$ és $g(f(0))$?

Ábrázolja az alábbi függvényeket, adja meg az inverzüket, és ezt is ábrázolja!

1.10. Feladat $f(x) = 4 - \frac{2}{x+3}$, $x > -3$

1.11. Feladat $g(x) = 2^{x-1} + 1$

1.12. Feladat $h(x) = 2 \ln x + 1$, $x > 0$

1.13. Feladat $l(x) = \sqrt{x+2}$, $x \geq -2$

1.14. Feladat Ábrázolja az alábbi függvényt! Mivel egyenlő $f(1)$ és $f(-2)$?

$$f(x) = \begin{cases} 5 - |x|, & \text{ha } x \geq -1 \\ e^{-x}, & \text{ha } x < -1 \end{cases}$$

1.15. Feladat Ábrázolja az alábbi függvényt! Adja meg a g függvény minimális és maximális értékét a $[-3, 2]$ intervallumon!

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{ha } |x| > 1 \\ x^3, & \text{ha } |x| \leq 1 \end{cases}$$

1.16. Feladat Ábrázolja az alábbi függvényt! Adja meg a h függvény lokális minimum- és maximumhelyeit a $[-2, 5]$ intervallumon!

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{ha } x \leq 2 \\ (x-2)(4-x), & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és zérushelyeit!

1.17. Feladat $f(x) = 3 - \sqrt{1-2x}$

1.18. Feladat $f(x) = \sqrt{5 - |x+2|}$

1.19. Feladat $f(x) = \ln \left(x - \frac{1}{x} \right)$

1.20. Feladat $f(x) = \lg(5 - |1-x|)$

1.21. Feladat $f(x) = \lg(2 + x - x^2)$

1.22. Feladat $f(x) = \sqrt{2 + \log_3 x}$

1.23. Feladat Legyen $f(x) = ax^7 + bx^3 + cx - 5$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$. Mennyivel egyenlő $f(7)$, ha $f(-7) = 7$?

1.4. Algebrai egyenletek és egyenlőtlenségek

Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

1.1. Feladat $x + 2|x - 3| = 9$

1.2. Feladat $|x^2 - 2x| = 1$

1.3. Feladat $x^2 + 7|x| - 8 = 0$

1.4. Feladat $|x^2 + 3x| + x^2 - 2 = 0$

1.5. Feladat $\frac{6}{x} = -2|x - 1| + 6$

1.6. Feladat $\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-4)^2} = 10$

Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

1.7. Feladat $|2x - 1| < 4$

1.8. Feladat $\sqrt{x^2 - 8x + 16} \geq 3$

1.9. Feladat $|x^2 - 5| > 4$

1.10. Feladat $|x - 3| \geq 1 - 2x$

Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

1.11. Feladat $\left(1 + \frac{4}{x^2 + x - 6}\right) \cdot \left(\frac{1}{x+1} + 1\right) = 0$

1.12. Feladat $x^4 + 5x^3 - 6x^2 = 0$

1.13. Feladat $\frac{x+3}{x-4} + \frac{22}{x^2-16} = \frac{7x+6}{x+4} - \frac{3}{x-4}$

1.14. Feladat $\frac{3-7x}{2x+4} - \frac{1,5-3,5x}{x+2} = 0$

1.15. Feladat $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} = 2$

1.16. Feladat $\frac{2x}{x+2} - \frac{x+2}{2-x} = \frac{x^2+12}{x^2-4}$

1.17. Feladat $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$

Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

1.18. Feladat $2x - \frac{3}{x-1} \geq 3$

1.19. Feladat $\frac{x}{x-1} > \frac{2}{x+4}$

1.20. Feladat $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x - 6} \geq 0$

1.21. Feladat $2 - \frac{x-1}{x} < \frac{x}{x+1}$

1.22. Feladat Határozza meg a , b és c paraméterek értékét, ha tudjuk, hogy minden x valós számra $(x+2)(x+b) = x^2 + cx + 6$.

1.23. Feladat Melyik az a másodfokú egyenlet, amelynek két gyöke $\left(\frac{1}{2}\right)$ és $\left(-\frac{1}{3}\right)$?

Adja meg az alábbi egyenletek megoldásait az a paraméter függvényében!

1.24. Feladat $(ax-1)^2 + (x-a)^2 = x^2 - 2 + a^2$

1.25. Feladat $(ax+1)^2 + (ax+1)(ax-1) = 4$

1.26. Feladat $(1-a)x^2 + x + a = 0$

1.27. Feladat Legyen x_1 és x_2 az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet két valós gyöke. Írja fel az együtthatók segítségével az alábbi kifejezéseket:

1. $x_1 + x_1x_2 + x_2$

2. $(x_1 + x_2)^2$

3. $x_1^2 + x_2^2$

4. $(x_1 - x_2)^2$

5. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

1.28. Feladat Legyen x_1 és x_2 a $p^2x^2 + x + (p+2) = 0$ egyenlet két valós gyöke. Hogyan válasszuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a a gyökök szorzatára $x_1x_2 > 1$ teljesüljön?

1.29. Feladat Milyen k valós szám esetén van az $x^2 - kx + (3 - k) = 0$ egyenletnek két azonos megoldása?

1.30. Feladat Milyen k valós szám esetén van az $x^2 - (k + 3)x + 4 = 0$ egyenletnek két különböző valós megoldása?

1.31. Feladat Milyen k valós szám esetén nincs valós megoldása az $x^2 + kx - (2k - 5) = 0$ egyenletnek?

1.32. Feladat Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola csúcspontja $M(1, -1)$, a parabola és az x tengely egyik metszéspontja 2. Határozza meg a, b, c értékét!

1.33. Feladat Határozza meg az $f(x) = -3x^2 + 2x + 5$ függvény legnagyobb értékét!

1.34. Feladat Határozza meg az $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ függvény legkisebb értékét!

1.5. Gyökös, exponenciális, logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek

Oldja meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

1.1. Feladat $\sqrt{\frac{2}{3} - 5x} - \sqrt{3x + \frac{1}{2}} = 0$

1.2. Feladat $\sqrt{x + 2} + \sqrt{1 - 3x} = 0$

1.3. Feladat $\sqrt{10 - x} = x - 10$

1.4. Feladat $\sqrt{4x - 7} = 1 - x$

1.5. Feladat $\sqrt{2x^2 - 3x - 10} - x = 0$

1.6. Feladat $\sqrt{2 - x} - \sqrt{x + 7} = -3$

1.7. Feladat $\sqrt{x - 4} + \sqrt{x - 1} = \sqrt{x + 4}$

1.8. Feladat $x + 3\sqrt[3]{x^2} - 18\sqrt[3]{x} = 0$

1.9. Feladat $\sqrt{9 - 5x} = \sqrt{3 - x} + \frac{6}{\sqrt{3 - x}}$

1.10. Feladat $\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x+1}{x-2}$

1.11. Feladat $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}} = 1$

1.12. Feladat $(x+2)\sqrt{x^2-2x+3} \geq 0$

1.13. Feladat $\sqrt{4x+17} > x+3$

Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

1.14. Feladat $2^{|x+1|+x} = 2$

1.15. Feladat $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 39$

1.16. Feladat $2^x + 38 \cdot 2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^x + 2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+2}$

1.17. Feladat $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2x+3}{2x-1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x+9}{2x+2}}$

1.18. Feladat $3^{2x^2+2x-12} = 9^{\frac{x-2}{x+3}}$

1.19. Feladat $\left(\frac{25}{4}\right)^2 \left(\frac{8}{125}\right)^{3x-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{1-x}$

1.20. Feladat $2^{3x+4} \cdot \frac{8^{2x-1}}{\sqrt{16^{x+1}}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{2-x}$

1.21. Feladat $5^x = 5^{-x} + \frac{24}{5}$

1.22. Feladat $\frac{1+4^{x-1}}{4^x} = \frac{17}{2^{x+3}}$

1.23. Feladat $4^x - 4^{\sqrt{x}+1} = 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}}$

Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

1.24. Feladat $\sqrt{9^x+8-3^{x+2}} > 3^x - 5$

1.25. Feladat $4^{3-|x|} < 32$

1.26. Feladat $\left(\frac{2}{7}\right)^{10-3x} \leq \frac{49}{4}$

1.27. Feladat $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x-17} > \frac{1}{27}$

Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

1.28. Feladat $\frac{\lg(x-10)}{1-\lg 5} = 2$

1.29. Feladat $\frac{\log_7(x+4)}{\log_7(x+2)} = 2$

1.30. Feladat $\lg \sqrt{x-5} + \lg \sqrt{2x-3} + 1 = \lg 30$

1.31. Feladat $\log_3 [(x-4)(x+3)] = \log_3(5x+4)$

1.32. Feladat $\log_8(23x+8) - 2\log_8(4x+4) = -\frac{2}{3}$

1.33. Feladat $\lg \sqrt{x^2-3x} - \lg \sqrt{3-x} = \lg 5$

1.34. Feladat $\ln(x^2+2x-3) = \ln \frac{x-1}{x+3}$

1.35. Feladat $2\lg 2 - 1 + \lg(x^3+1) = \lg\left(\frac{1}{x^3} + 1\right)$

1.36. Feladat $\log_x(x^3+3x^2-27) = 3$

1.37. Feladat $\log_{x+1}(2x^2+1) = 2$

1.38. Feladat $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0$

1.39. Feladat $\log_{\frac{1}{4}}(\log_{16}(\log_2 x)) = 1$

Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

1.40. Feladat $\log_3(x^2-2x) < 0$

1.41. Feladat $\log_4(5-6x) \leq 2$

1.42. Feladat $\log_{\frac{1}{2}}(3x-4) > \log_2 \frac{1}{8}$

1.43. Feladat $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3x-1) < -1$

1.6. Trigonometrikus azonosságok és egyenletek

1.1. Feladat Töltse ki az alábbi táblázatot segédeszköz használata nélkül!

	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	210°	240°	270°	300°	315°
$\sin \varphi$												
$\cos \varphi$												
$\operatorname{tg} \varphi$												

1.2. Feladat Számítsa ki a hiányzó értékeket a φ meghatározása nélkül!

$\sin \varphi$	$\frac{3}{4}$		$\frac{8}{17}$			
$\cos \varphi$		$\frac{5}{12}$			$\frac{63}{65}$	
$\operatorname{tg} \varphi$				$\frac{35}{12}$		$\frac{21}{20}$

1.3. Feladat Oldja meg az alábbi egyenleteket segédeszköz használata nélkül!

- $\sin 2\varphi = 1$; $\sin 2\varphi = -\frac{1}{2}$; $\sin \frac{\varphi}{2} = -1$; $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 2\varphi = 0$; $\cos 2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \frac{\varphi}{2} = 1$; $\cos \frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{2}$
- $\operatorname{tg} 2\varphi = 0$; $\operatorname{tg} 2\varphi = -1$; $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 1$; $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- $\operatorname{ctg} 3\varphi = 1$; $\operatorname{ctg} 3\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{3} = -\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = 0$

1.4. Feladat Oldja meg az alábbi egyenleteket segédeszköz használata nélkül!

- $\sin^2 \varphi = 1$; $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}^2 \varphi = 3$
- $\sin \varphi = \operatorname{ctg} \varphi$; $\sin \varphi = -\operatorname{ctg} \varphi$; $\cos \varphi = \operatorname{tg} \varphi$

1.5. Feladat Fejezze ki minden $\varphi \in]0, 90^\circ[$ esetén

- $\sin \varphi$ -t és $\cos \varphi$ -t $\operatorname{tg} \varphi$ segítségével;
- $\operatorname{tg} \varphi$ -t $\sin \varphi$ segítségével és $\operatorname{tg} \varphi$ -t $\cos \varphi$ segítségével!

1.6. Feladat *Fejezze ki*

- $\cos 2\varphi$ segítségével $\sin^2 \varphi$ -t és $\cos^2 \varphi$ -t;
- $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ segítségével $\sin \varphi$ -t és $\cos \varphi$ -t!

1.7. Feladat *Adja meg az α forgásszöget segédeszköz használata nélkül, ha*

- $\cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{2}$
- $\operatorname{tg} \alpha = 1$ és α a harmadik síknegyedben van.

Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

1.8. Feladat $\sin \varphi (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi) + \cos \varphi (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi)$

1.9. Feladat $(\sin \varphi - \cos \varphi)(1 + \sin \varphi \cos \varphi) + (\sin \varphi + \cos \varphi)(1 - \sin \varphi \cos \varphi)$

Számítsa ki a következő kifejezés értékét!

1.10. Feladat $\operatorname{tg} \frac{21\pi}{4} + \sqrt[5]{\sin(-7\pi)}$

1.11. Feladat $\log_{\pi} \left[\left(\cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \right)^2 - \sin \frac{4\pi}{3} \right]$

Oldja meg az egyenleteket a megadott intervallumon!

1.12. Feladat $8 \cos 2x + 7 \cos^2 x = 5 \sin x + \frac{27}{4}, \quad x \in [0, \pi]$

1.13. Feladat $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x = 4, \quad x \in]0, \frac{\pi}{4}]$

1.14. Feladat $\sqrt{1 - \cos^2 x} - \cos 2x = 0, \quad x \in [0, 2\pi]$

Oldja meg az alábbi egyenleteket!

1.15. Feladat $\sin x + \cos^3 x = \cos x + \sin^3 x$

1.16. Feladat $3 \cos 2x = -\sin x + 3$

1.17. Feladat $4 \cos^2 x + 8 \sin x + 1 = 0$

1.18. Feladat $\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \sin x + \sin 2x = \frac{1}{\cos x}$

1.19. Feladat $\frac{\cos 2x}{\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{4} \sin^2 2x$

1.20. Feladat $(1 - \cos 2x)^2 + (1 + \sin 2x)^2 = 1$

1.21. Feladat $\sin 3x - \cos 2x \cdot \sin x = \cos x$

1.22. Feladat $2 \cos^3 x + \cos(\pi - x) = 0$

Számítsa ki az alábbi kifejezések értékét segédeszköz használata nélkül!

1.23. Feladat $\cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ$

1.24. Feladat $\sin 30^\circ \cdot \cos 15^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 15^\circ$

1.25. Feladat $\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ$

1.26. Feladat $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$

1.27. Feladat $\sin 70^\circ \cdot \sin 40^\circ + \frac{1}{2} \cos 110^\circ$

1.28. Feladat $\cos^2 22,5^\circ$

1.7. Sorozatok; egyenletrendszerek

1.1. Feladat Legyen az (a_n) számtani sorozat, melyben $a_5 = 17$ és $a_7 = 10$. Határozza meg a sorozat első tagját, differenciáját, és a sorozat első nyolc tagjának összegét.

1.2. Feladat Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. A háromszög területe 150 cm^2 . Mekkora az oldalak?

1.3. Feladat Legyen az (a_n) számtani sorozat, melyben $d = 0,5$, $S_n = 38$ és $S_{n+4} = 69$. Mennyi a_1 és n ?

1.4. Feladat Legyen (a_n) számtani sorozat, melyben $a_1 + a_2 + a_3 = -12$ és $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80$. Határozza meg a sorozat első három tagját!

1.5. Feladat Legyen (a_n) mértani sorozat, melyben $a_1 + a_2 + a_3 = 39$ és $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 729$. Határozza meg a sorozat első három tagját!

1.6. Feladat Legyen (a_n) mértani sorozat.

1. $a_2 = 3, a_6 = 12. \quad S_{10} = ?$

2. $a_3 = 3, a_9 = 24. \quad S_{12} = ?$

3. $a_4 - a_2 = a_2 + a_3 + a_4 = -6. \quad a_1 = ?, \quad q = ?$

1.7. Feladat Egy számtani sorozat első öt tagjának összege 25. Az első, második és ötödik egy mértani sorozat szomszédos tagjai. Határozza meg, hogy mennyi az a_1 , a d és a q !

1.8. Feladat Egy számtani sorozat első három tagjának összege 21. Ha az elsőhöz 6-ot, a másodikhoz 13-at és a harmadikhoz 30-at adunk, akkor egy mértani sorozat egymás utáni tagjait kapjuk. Mi a számtani sorozat?

1.9. Feladat Egy mértani sorozat első három tagjának összege 63. Ha az első taghoz 3-at adunk, a harmadikból 30-at kivonunk, akkor egy számtani sorozat egymást követő tagjait kapjuk. Mi a mértani sorozat?

1.10. Feladat Egy számtani sorozat 12. tagja, valamint az első n tagjának összege is 0. A sorozat első $(2n - 1)$ darab tagjának az összege 495. Adja meg a sorozat első $3n$ tagjának összegét!

1.11. Feladat Egy (a_n) számtani sorozatban $a_1 = \sqrt{2}$. Az a_1, a_2, a_4 ebben a sorrendben egy mértani sorozat első három tagja. Adja meg a mértani sorozat első 10 tagjának összegét!

Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

1.12. Feladat

$$x^2 + xy = 210$$

$$y^2 + xy = 231$$

1.13. Feladat

$$xy + x + y = 29$$

$$xy - 2x - 2y = 2$$

1.14. Feladat

$$\begin{aligned}(2x + y)^2 &= 16 \\ x - \frac{1}{y} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

1.15. Feladat

$$\begin{aligned}x^2 - 6xy + 9y^2 &= 25 \\ x + \frac{1}{y} &= 9\end{aligned}$$

1.16. Feladat

$$\begin{aligned}x + \frac{3}{4}y &= 9 \\ \frac{x}{2} - \frac{2y}{3} &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

1.17. Feladat

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{3} - \frac{y-3}{4} &= 3 \\ \frac{3}{x+2} - \frac{1}{y-3} &= 0\end{aligned}$$

1.18. Feladat

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-2y} - \frac{2}{2x-y} &= 3 \\ -\frac{2}{x-2y} + \frac{5}{2x-y} &= -5\end{aligned}$$

1.19. Feladat

$$\begin{aligned}\frac{6}{x-5} + \frac{1}{y-2} &= 2 \\ \frac{4}{x-5} + \frac{3}{y+2} &= 3\end{aligned}$$

1.20. Feladat

$$\begin{aligned}y - x &= 44 \\ \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

1.21. Feladat

$$\begin{aligned}3^x + 4^y &= 73 \\ 3^x \cdot 4^y &= 576\end{aligned}$$

1.22. Feladat

$$\begin{aligned}2x - 4\sqrt{x} + y - 4 &= 0 \\ 5\sqrt{x} - y &= 17\end{aligned}$$

1.23. Feladat

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}}{2} + y &= 4 \\ y^2 - \sqrt{x} &= 27\end{aligned}$$

1.24. Feladat

$$\begin{aligned}3^{\log_3 x} - 2^{\log_4 y} &= 77 \\ 3^{\log_3 \sqrt{x}} - 2^{\log_{16} y} &= 7\end{aligned}$$

1.25. Feladat

$$\begin{aligned}\log_2(xy) &= 5 \\ \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right) &= 1\end{aligned}$$

1.26. Feladat

$$\begin{aligned}8^{2x+1} &= 32 \cdot 2^{4y-1} \\ 5 \cdot 5^{x-y} &= \sqrt{25^{2y+1}}\end{aligned}$$

1.27. Feladat

$$\begin{aligned}3^y \cdot 9^x &= 81 \\ \lg(x+y)^2 - \lg x &= 2 \lg 3\end{aligned}$$

1.28. Feladat

$$\begin{aligned}3 \cdot 2^{x+y} - 5 \cdot 2^{x-y} &= 182 \\ 5 \cdot 2^x \cdot 2^y - 4 \cdot 2^x \cdot 2^{-y} &= 312\end{aligned}$$

1.8. Koordinátageometria

1.1. Feladat Legyenek $\mathbf{a} = (2, 3)$, $\mathbf{b} = (-3, 2)$ és $\mathbf{c} = (5, -1)$. Adja meg a következő vektorokat: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$; $3(2\mathbf{a} - \mathbf{b})$; $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c}$; $(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{b} + \mathbf{c})$; $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

1.2. Feladat Legyenek $\mathbf{a} = (2, 5)$, $\mathbf{b} = (-10, 2)$ és $\mathbf{c} = (-6, 12)$.

1. Bontsa fel a $\mathbf{c}$ vektort $\mathbf{a}$ -val és $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos összetevőkre!
2. Bontsa fel a $\mathbf{b}$ vektort $\mathbf{c}$ -vel párhuzamos és $\mathbf{c}$ -re merőleges összetevőkre!
3. Adjon meg $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ -re merőleges egységnyi hosszúságú vektort!

1.3. Feladat Legyen $\mathbf{a} = (4, 3)$ és $\mathbf{b} = (-1, 2)$. Mennyi az $\mathbf{a}\mathbf{b}$ skaláris szorzat? Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által bezárt szög?

1.4. Feladat Adja meg a p paraméter összes olyan értékét, amelyre az $\mathbf{a} = (6, -5)$ és $\mathbf{b} = (p, 3)$ vektorok párhuzamosak; merőlegesek; illetve hegyesszöget zárnak be egymással!

1.5. Feladat Adott három pont: $A(2, 0)$, $B(-5, 4)$, $C(-1, 3)$. Mekkora az ABC háromszög szögei? Adja meg az összes lehetséges $D(x, y)$ pontot úgy, hogy a pontok egy paralelogramma csúcspontjai legyenek!

1.6. Feladat Adott két pont: $A(2, 6)$ és $B(-3, 2)$. Adja meg

1. az A és B távolságát!
2. az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontjának és harmadolópontjainak koordinátáit!
3. az $\overline{AB}$ szakasz felezőmerőlegesének egyenletét!
4. az A , B pontokon átmenő egyenes egyenletét és az egyenes meredekségét!
5. annak a körnek az egyenletét, amelynek az $\overline{AB}$ szakasz egy átmérője!

1.7. Feladat Adott két pont: $C(-1, -1)$ és $D(1, 3)$. Adja meg azt a pontot, amely C -től és D -től is 3 egység távolságra van!

1.8. Feladat Az x , illetve az y tengely melyik pontja van egyenlő távolságra az $A(2, 7)$ és $B(6, -1)$ pontoktól?

1.9. Feladat Mennyi az $A(3, -1)$, $B(1, 4)$ és $C(-7, -9)$ csúcspontú háromszög súlypontjának az origótól vett távolsága?

1.10. Feladat Adott két egyenes: $g: 5x - 4y = 14$, $h: 2x - 3y = 3$ és a $P(5, 2)$ pont. Adja meg

1. a két egyenes metszéspontjának a P -től való távolságát.
2. azon egyenes egyenletét, amely átmegy a P -n és a két egyenes metszéspontján.
3. azon egyenes egyenletét, amely átmegy a P -n és párhuzamos g -vel.
4. azon egyenes egyenletét, amely átmegy a P -n és h -ra merőleges.
5. a P pont és a h egyenes távolságát!

1.11. Feladat Határozza meg a $P(2, 5)$ pontnak az $y = 3x + 9$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképét!

1.12. Feladat A $C(-1, 2)$ középpontú kör átmegy a $P(3, -2)$ ponton. Mekkora a kör sugara? Adja meg a kör egyenletét!

1.13. Feladat A paraméterek mely értékeire lesz köregyenlet?

1. $x^2 + y^2 + 4x + 10y + a = 0$
2. $4x^2 + Ay^2 - 32x + 24y + Bxy + C = 0$

1.14. Feladat Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely átmegy a $P(8, -1)$ ponton, és érinti a koordinátatengelyeket!

1.15. Feladat Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti a koordinátatengelyeket és a $3x + 4y = 12$ egyenletű egyenest!

1.16. Feladat Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a $2x - 5y = 7$ egyenletű egyenesre, és átmegy az $x^2 + 8x + y^2 - 6y = 10$ egyenletű kör középpontján!

1.17. Feladat Írja fel az $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ egyenletű kör 5 abszcisszájú pontjaiba húzott érintőinek egyenletét!

1.18. Feladat Az $x^2 + y^2 - 18x + 6y - 166 = 0$ egyenletű körhöz a $P(25, -15)$ pontból érintőket húzunk. Mik az érintők egyenletei?

1.19. Feladat Írja fel az $A(0, 9)$, $B(5, 10)$ és $C(-7, 2)$ pontokon áthaladó kör egyenletét!

1.20. Feladat Milyen hosszú az $x^2 + y^2 + 6x - 16y + 24 = 0$ egyenletű kör azon legrövidebb húrja, amely a $P(1, 4)$ ponton átmegy?

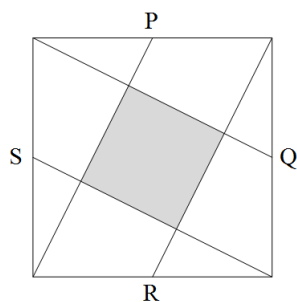
1.21. Feladat Egy paralelogramma két oldalegyenesének egyenlete: $3x + 2y = 13$ és $5x - 3y = -10$, egy csúcspontja pedig $P(-7, -2)$. Adja meg a többi csúcs koordinátáit!

1.22. Feladat Adottak az $A(1, 4)$, $B(5, -2)$ és $C(-1, 3)$ pontok. Írja fel az ABC háromszög magasságvonalainak egyenletét!

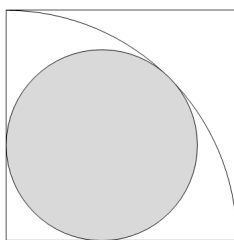
1.23. Feladat Adottak az $A(5, 3)$, $B(2, 5)$ és $C(6, -1)$ pontok. Határozza meg az ABC háromszög A csúcsból induló súlyvonalának az origótól való távolságát!

1.9. Síkidomok kerülete, területe; testek

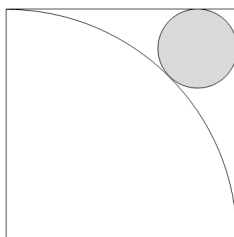
1.1. Feladat Mekkora a szírozott rész területe, ha a P , Q , R , S pontok az egységnyi oldalú négyzet oldalfelező pontjai?



1.2. Feladat Mekkora az ábrán látható körlemez sugara, ha a négyzet oldala egységnyi hosszú?



1.3. Feladat Mekkora az ábrán látható körlemez sugara, ha a négyzet oldala egységnyi hosszú?



- 1.4. Feladat** Egy egységnyi területű egyenlő szárú háromszög szárszöge 30° . Mekkora a háromszög szára és alapja?
- 1.5. Feladat** Mekkora az a oldalú szabályos háromszög magassága és területe?
- 1.6. Feladat** Egy szabályos háromszög magassága m . Mekkora az oldala és a területe?
- 1.7. Feladat** Egy szabályos hatszög két párhuzamos oldalának távolsága 6 egység. Hány egység hosszú a hatszög oldala? Mekkora a hatszög területe?
- 1.8. Feladat** Egy szabályos háromszög köré írható kör sugara 2 egység. Mekkora a háromszög beírt körének sugara? Mekkora a háromszög oldala és területe?
- 1.9. Feladat** Egy körbe és a kör köré is egy-egy szabályos háromszöget írunk. Mennyi a két háromszög területének aránya?
- 1.10. Feladat** Egy háromszöget egyik középvonala mentén kettévágunk. Milyen területarányú részek keletkeznek?
- 1.11. Feladat** Három r sugarú, egymást érintő kör köré írjunk mindhárom kört érintő kört. Mekkora a három kört magában foglaló kör sugara?
- 1.12. Feladat** Egy derékszögű háromszög átfogója 41 cm, területe 180 cm^2 . Mekkora a befogók?
- 1.13. Feladat** Egy téglalap oldalai $AB = 9 \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$. Az AB oldalnak melyik P pontja van A -tól és C -től egyenlő távolságra?
- 1.14. Feladat** Egy téglalap egyik oldala 2 cm. A téglalap átlójának mérőszáma megegyezik területének mérőszámával. Bizonyítsa be, hogy a téglalap átlója az egyik oldallal 30° -os szöget zár be.
- 1.15. Feladat** Egy téglalap kerülete 68 cm, átlója 26 cm. Hány cm^2 a területe?
- 1.16. Feladat** Az egységnyi területű rombusz egyik szöge 150° . Mekkora a rombusz oldalai és átlói?
- 1.17. Feladat** Mekkora a szimmetrikus trapéz alapjai, ha középvonala 45 mm, szára 41 mm, magassága 9 mm?
- 1.18. Feladat** Két szabályos tetraéder felszínének aránya 1 : 2. Mekkora a térfogatuk aránya?

1.19. Feladat Egy kúp alakú 1 dl-es poharat fél dl folyadék magasságának hányadrészéig tölt meg?

1.20. Feladat Egy kocka lapátlójának hossza $\sqrt{6}$. Milyen hosszú a kocka testátlója?

1.21. Feladat Milyen messze van az a élű kocka testátlója egy rá nem illeszkedő csúctól?

1.22. Feladat Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 12 dm, magassága 6 dm. Mekkora annak a kockának az éle, amelynek négy csúcsa a gúla alapján, másik négy csúcsa pedig a gúla oldalélein van?

1.23. Feladat Egy forgáskúp alapkörének sugara 12 cm, alkotója 20 cm. A kúpba azzal közös tengelyű, egyenlő oldalú hengert írunk. Mekkora a henger térfogata? (Az egyenlő oldalú henger tengelymetszete négyzet.)

1.24. Feladat Mekkora a gömb térfogata, ha a gömbbe írt egyenes körkúp alapkörének sugara 12 cm, alkotója pedig 32 cm?

1.25. Feladat Egy félgömbbe kockát helyezünk el úgy, hogy a kocka négy csúcsa határkörének síkjába, négy csúcsa pedig a félgömbbe essék. Mekkora a félgömb sugara, ha a kocka éle a ?

1.26. Feladat Mekkora az a élű szabályos tetraéder két kitérő élének távolsága?

1.27. Feladat Mekkora az a élű szabályos tetraéder térfogata?

1.28. Feladat Állítsunk vízszintes síkon álló, három egymást érintő R sugarú gömbre egy ugyancsak R sugarú negyediket. Mekkora a négy gömbből álló test magassága?

2. fejezet

Megoldások

2.1. Műveletek törtekkel, hatványokkal, gyökökkel

2.1.1 Megoldás

$$3[(-2) - (-3)] + (-2)(-3) = 3 \cdot 1 + 6 = 9$$

2.1.2 Megoldás

$$\frac{4\{[(2-3) \cdot 5 + 4] \cdot 2 + 3\} + 10}{7} = \frac{4[(-1) \cdot 2 + 3] + 10}{7} = \frac{4 \cdot 1 + 10}{7} = 2$$

2.1.3 Megoldás

$$\left[\left(\frac{3(7+2) - 8}{-3} + 7 \right) \cdot 2 \right] : \frac{-6}{(-3)(-2)} = \left[\left(\frac{27-8}{-3} + 7 \right) \cdot 2 \right] : (-1) = \\ \left[\frac{19-21}{-3} \cdot 2 \right] : (-1) = -\frac{4}{3}$$

2.1.4 Megoldás

$$6^{-3} \cdot (-2)^5 \cdot 12^{-1} \cdot (-3)^4 = 6^{-3} \cdot (-1) \cdot 2^5 \cdot 6^{-1} \cdot 2^{-1} \cdot 3^4 = -6^{-3} \cdot 6^{-1} \cdot 2^4 \cdot 3^4 = \\ -6^{-3} \cdot 6^{-1} \cdot 6^4 = -1$$

2.1.5 Megoldás

$$\frac{26^{-4} \cdot 25^{-4}}{60^{-8}} + \left[\left(\frac{1}{1024} \right)^{\frac{1}{5}} \right]^{-\frac{3}{2}} = \frac{60^8}{26^4 \cdot 25^4} + \left[\left(\frac{1}{2^{10}} \right)^{\frac{1}{5}} \right]^{-\frac{3}{2}} = \\ \frac{(2^2 \cdot 3 \cdot 5)^8}{2^4 \cdot 13^4 \cdot 5^8} + \left[(2^{-10})^{\frac{1}{5}} \right]^{-\frac{3}{2}} = \frac{2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^8}{2^4 \cdot 13^4 \cdot 5^8} + (2^{-2})^{-\frac{3}{2}} = \frac{2^{12} \cdot 3^8}{13^4} + 2^3$$

2.1.6 Megoldás

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{2}{3}} : \left(\frac{36}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} + \left(8^{-\frac{1}{3}}\right)^{-2} &= \left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{125}{36}\right)^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{8^{\frac{1}{3}}}\right)^{-2} = \\ \left(\frac{125}{6 \cdot 36}\right)^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} &= \left(\frac{6^3}{5^3}\right)^{\frac{2}{3}} + 2^2 = \frac{6^2}{5^2} + 4 = \frac{36}{25} + 4 = \frac{136}{25} \end{aligned}$$

2.1.7 Megoldás

$$\left(\frac{12^4 \cdot 5^5}{3^4} : \frac{2^7 \cdot 55^6}{(-11)^6}\right)^{-2} = \left(\frac{3^4 \cdot 2^8 \cdot 5^5}{3^4} \cdot \frac{11^6}{2^7 \cdot 5^6 \cdot 11^6}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{25}{4}$$

2.1.8 Megoldás

$$\begin{aligned} 24^2 \cdot 42^3 \cdot 12^2 \cdot 28 \cdot 18^3 &= (2^3 \cdot 3)^2 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 7)^3 \cdot (2^2 \cdot 3)^2 \cdot (2^2 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 3^2)^3 = \\ (2^6 \cdot 3^2) \cdot (2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3) \cdot (2^4 \cdot 3^2) \cdot (2^2 \cdot 7) \cdot (2^3 \cdot 3^6) &= 2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 7^4 \end{aligned}$$

2.1.9 Megoldás

$$\begin{aligned} \frac{3^5 \cdot 8^5 \cdot 20^4 \cdot 49}{16^4 \cdot 6^4 \cdot 70^2} &= \frac{3^5 \cdot (2^3)^5 \cdot (2^2 \cdot 5)^4 \cdot 7^2}{(2^4)^4 \cdot (2 \cdot 3)^4 \cdot (2 \cdot 5 \cdot 7)^2} = \frac{3^5 \cdot 2^{15} \cdot 2^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2}{2^{16} \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = \\ \frac{2^{23} \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^2}{2^{22} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2} &= 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \end{aligned}$$

2.1.10 Megoldás

$$\frac{2^{10} + 2^{11} - 2^{12}}{2^9 + 2^{10}} = \frac{2^{10} \cdot (1 + 2 - 2^2)}{2^9 \cdot (1 + 2)} = \frac{2 \cdot (-1)}{3} = -\frac{2}{3}$$

2.1.11 Megoldás

$$\frac{1,6 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^{-2}} = 0,8 \cdot 10^{-1} \cdot 2,5 \cdot 10^5 = 2 \cdot 10^4$$

2.1.12 Megoldás

$$\frac{360000 \cdot 0,0000025}{0,009} = \frac{36 \cdot 10^4 \cdot 25 \cdot 10^{-7}}{9 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 100$$

2.1.13 Megoldás

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} &= \frac{\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}} = \\ \frac{(2-\sqrt{2}) + (2+\sqrt{2})}{\sqrt{4-2}} &= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

2.1.14 Megoldás

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{16 + 2\sqrt{55}} - \sqrt{16 - \sqrt{220}} \right)^2 &= \left(\sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{11})^2} - \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{11})^2} \right)^2 = \\ \left(|\sqrt{5} + \sqrt{11}| - |\sqrt{5} - \sqrt{11}| \right)^2 &= \left((\sqrt{5} + \sqrt{11}) - (\sqrt{11} - \sqrt{5}) \right)^2 = \left(2\sqrt{5} \right)^2 = 20 \end{aligned}$$

2.1.15 Megoldás $B < \ln e^2 = 2$; $C = \lg 10^2 = 2 \Rightarrow A < D < B < C$

2.1.16 Megoldás $B = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; $C = 5$; $D = \frac{1}{20}$; $E = 2^{\frac{3}{2}}$; $F = 3 \Rightarrow$
 $D < B < A < E < F < C$

2.1.17 Megoldás $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $B = 1$; $C = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $D = -1$; $E = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$
 $D < E < C < A < B$

2.1.18 Megoldás $A = |-3| = 3$; $B = \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $C = \log_3 3^{-2} = -2$
 $\Rightarrow C < B < A$

2.1.19 Megoldás

$$A = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = |2 + \sqrt{3}| = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow 3 < A < 4$$

$$B = \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} = |3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2} \Rightarrow 1 < B < 2$$

$$C = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2 \Rightarrow 0 < C < 1$$

$$D = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = |1 - \sqrt{3}| - |1 + \sqrt{3}| = (\sqrt{3} - 1) - (1 + \sqrt{3}) = -2$$

A sorrend: $D < C < B < A$.

2.1.20 Megoldás

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{a^5 \cdot \sqrt[5]{a^2}} \right) \cdot \left(\sqrt{a^5 \cdot \sqrt[5]{a^2}} \right) : \frac{\sqrt[5]{a \cdot \sqrt[3]{a}}}{\sqrt[3]{a^2}} &= a^{\frac{5}{2}} \cdot a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{5}{2}} \cdot a^{\frac{2}{5}} \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{1}{15}}} = \\ a^5 \cdot \frac{a^{\frac{2}{5}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{15}}} &= a^5 \cdot \frac{a^{\frac{16}{15}}}{a^{\frac{1}{15}}} = a^5 \cdot a = a^6 \end{aligned}$$

2.1.21 Megoldás

$$\frac{(-2)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\sqrt[3]{64}\right)^n + 16^{\frac{n}{2}}} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{n+1} \cdot 2^{-n}}{4^n + 4^n} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{2 \cdot 4^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{4^n}$$

2.1.22 Megoldás

$$\frac{9^{\frac{n}{2}+1} + (\sqrt{3})^{2n+2}}{36^{\frac{n}{2}} + (\sqrt{6})^n \cdot (\sqrt{3})^n \cdot (\sqrt{2})^n} = \frac{9 \cdot 3^n + 3 \cdot 3^n}{6^n + (\sqrt{6})^n \cdot (\sqrt{6})^n} = \frac{12 \cdot 3^n}{2 \cdot 6^n} = \frac{6 \cdot 3^n}{2^n \cdot 3^n} = \frac{6}{2^n}$$

2.1.23 Megoldás

$$\frac{16^{\frac{n}{2}} - 2^{2n+3}}{125^{\frac{n}{3}} + (\sqrt{5})^{2n+2}} = \frac{4^n - 8 \cdot 4^n}{5^n + 5 \cdot 5^n} = -\frac{7}{6} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

2.1.24 Megoldás

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{(a+b)^2} \cdot \sqrt{\frac{(a^2-b^2)^6}{(a-b)^{10}}} &= \frac{a-b}{(a+b)^2} \cdot \sqrt{\frac{(a-b)^6 \cdot (a+b)^6}{(a-b)^{10}}} = \\ \frac{a-b}{(a+b)^2} \cdot \sqrt{\frac{(a+b)^6}{(a-b)^4}} &= \frac{a-b}{(a+b)^2} \cdot \frac{|(a+b)^3|}{(a-b)^2} = \frac{|a+b|}{a-b} \end{aligned}$$

2.1.25 Megoldás

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2-8x+16} \cdot \frac{25-x^2}{5x-x^2} \cdot \frac{x^2-16}{(5+x)(4+x)} &= \\ \frac{x^2}{(x-4)^2} \cdot \frac{(5-x)(5+x)}{x(5-x)} \cdot \frac{(x-4)(x+4)}{(5+x)(4+x)} &= \frac{x}{x-4} \end{aligned}$$

2.1.26 Megoldás

$$\frac{1 - \frac{x^2}{x^2-1}}{2 + \frac{3x-1}{1-x}} = \frac{\frac{x^2-1-x^2}{x^2-1}}{\frac{2-2x+3x-1}{1-x}} = \frac{-1}{x^2-1} \cdot \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

2.1.27 Megoldás

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{x+4} - \frac{x+4}{x-4} + \frac{16x}{x^2-16} &= \frac{(x-4)^2 - (x+4)^2}{(x+4)(x-4)} + \frac{16x}{x^2-16} = \\ \frac{(x^2-8x+16) - (x^2+8x+16) + 16x}{x^2-16} &= \frac{-16x+16x}{x^2-16} = 0 \end{aligned}$$

2.1.28 Megoldás

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{x^2 - x} - \frac{2x}{1 - x^2} \right) \cdot \frac{2x^2 + 2x}{x^3 - 1} + \frac{4}{x - 1} = \\ & \left(\frac{2}{x(x - 1)} + \frac{2x}{(x - 1)(x + 1)} \right) \cdot \frac{2x(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} + \frac{4}{x - 1} = \\ & \frac{2x + 2 + 2x^2}{x(x - 1)(x + 1)} \cdot \frac{2x(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} + \frac{4}{x - 1} = \frac{2}{x - 1} \cdot \frac{2}{x - 1} + \frac{4}{x - 1} = \\ & \frac{4 + 4x - 4}{(x - 1)^2} = \frac{4x}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

2.1.29 Megoldás

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2c}{c + 2} - \frac{2c}{3c - 6} + \frac{8c}{c^2 - 4} \right) \cdot \frac{c - 2}{c^2 - 4c} = \\ & \left(\frac{1}{c + 2} - \frac{1}{3(c - 2)} + \frac{4}{(c - 2)(c + 2)} \right) \cdot 2c \cdot \frac{c - 2}{c(c - 4)} = \\ & \frac{3(c - 2) - (c + 2) + 12}{3(c - 2)(c + 2)} \cdot \frac{2(c - 2)}{c - 4} = \frac{2c + 4}{3(c + 2)} \cdot \frac{2}{c - 4} = \frac{4}{3(c - 4)} \end{aligned}$$

2.1.30 Megoldás

$$\sqrt{x \cdot \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{x}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}} = x$$

2.1.31 Megoldás

$$\sqrt{x^{-1} \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}} = x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{12}} = x^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$$

2.1.32 Megoldás

$$\sqrt{\frac{x}{\sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x}}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{6}} \cdot x^{\frac{1}{12}}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{12}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}$$

2.1.33 Megoldás

$$\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}} - \sqrt{x \cdot \sqrt[12]{x}} = x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{2}{12}} \cdot x^{\frac{3}{24}} - x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{24}} = x^{\frac{13}{24}} - x^{\frac{13}{24}} = 0$$

2.2. A logaritmus fogalma; arány- és százalékszámítás

2.2.1 Megoldás

$$A = \lg 10 = 1; B = \log_2 2^{-2} = -2; C = \log_3 3^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}; D = \ln e^{-4} = -4 \\ \Rightarrow D < B < C < A$$

2.2.2 Megoldás

$$A = \left((\sqrt{3})^{-4} \right)^{\log_{\sqrt{3}} 5} = (\sqrt{3})^{-4 \log_{\sqrt{3}} 5} = (\sqrt{3})^{\log_{\sqrt{3}} 5^{-4}} = 5^{-4} = \frac{1}{625} \\ B = \left(\frac{1}{4} \right)^{\log_2 3} = (2^{-2})^{\log_2 3} = 2^{-2 \log_2 3} = 2^{\log_2 3^{-2}} = 3^{-2} = \frac{1}{9} \\ C = \left(\left(\frac{1}{3} \right)^{-1} \right)^{\log_{\frac{1}{3}} 2} = \left(\frac{1}{3} \right)^{-\log_{\frac{1}{3}} 2} = \left(\frac{1}{3} \right)^{\log_{\frac{1}{3}} 2^{-1}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow A < B < C$$

2.2.3 Megoldás

$$A = \frac{3^2}{3^{\log_3 10}} = \frac{9}{10} \\ B = \frac{(\sqrt{2})^3}{(\sqrt{2})^{\log_2 5}} = \frac{2\sqrt{2}}{2^{\frac{1}{2} \log_2 5}} = \frac{2\sqrt{2}}{2^{\log_2 \sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} \\ C = \frac{(2^3)^{\log_2 6}}{(2^3)^2} = \frac{2^{3 \log_2 6}}{(2^2)^3} = \frac{2^{\log_2 6^3}}{4^3} = \frac{6^3}{4^3} = 1,5^3 = \frac{15 \cdot 2,25}{10} \\ \Rightarrow A < B < C$$

2.2.4 Megoldás

$$A = \lg \frac{1,2 \cdot 1,5}{0,9} = \lg \frac{12 \cdot 15}{90} = \lg \frac{3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5}{9 \cdot 10} = \lg 2 \\ B = \ln 5^2 - \ln e^2 = \ln \frac{25}{e^2} > \ln \frac{25}{9} > \ln 2 > \lg 2 \\ C = 3 \log_2 2^3 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^{-4} = 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot (-4) = 11 \\ \Rightarrow A < B < C$$

2.2.5 Megoldás

$$q = \frac{\lg A - \lg C}{\lg 5} \Rightarrow q \cdot \lg 5 = \lg A - \lg C \Rightarrow \lg 5^q = \lg \frac{A}{C} \Rightarrow 5^q = \frac{A}{C} \Rightarrow A = C \cdot 5^q$$

2.2.6 Megoldás

$$2^p \cdot 5^q = 10 \Rightarrow p \lg 2 + q \lg 5 = 1 \Rightarrow q = \frac{1 - p \lg 2}{\lg 5}$$

2.2.7 Megoldás

$$\begin{aligned} \sqrt{25^{1-\lg_5 10}} + \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^{\lg 9-2} &= \sqrt{\frac{25}{5^{2\lg_5 10}}} + \left(10^{-\frac{1}{2}}\right)^{\lg 9-2} = \frac{5}{\sqrt{5^{\lg_5 100}}} + 10^{-\frac{1}{2} \lg 9+1} = \\ \frac{5}{\sqrt{100}} + 10^{\lg \frac{1}{3}} \cdot 10 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 10 = \frac{23}{6} \end{aligned}$$

2.2.8 Megoldás

$$\begin{aligned} 49^{1-\lg_7 2} - 5^{-\lg_5 4} + \sin \frac{34\pi}{3} &= \frac{49}{7^{2\lg_7 2}} - \frac{1}{5^{\lg_5 4}} + \sin \left(10\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = \\ \frac{49}{4} - \frac{1}{4} + \sin \left(\frac{4\pi}{3}\right) &= 12 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

2.2.9 Megoldás

$$\begin{aligned} (\sin 60^\circ)^{\sqrt[3]{8}} + \frac{3^{10} + 3^{11}}{3^{12} - 3^{10}} + \left(\frac{1}{49}\right)^{\log_{\sqrt{7}} 2} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1+3}{3^2-1} + \left(\left(\sqrt{7}\right)^{-4}\right)^{\log_{\sqrt{7}} 2} = \\ \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{1}{16} &= \frac{21}{16} \end{aligned}$$

2.2.10 Megoldás

$$\begin{aligned} (-\cos 30^\circ)^{\sqrt[3]{-8}} + 5000000 \cdot 0,000002 + 0,25^{\log_{16} 25} &= \\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2} + 5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-6} + \left(16^{-\frac{1}{2}}\right)^{\log_{16} 25} &= \frac{4}{3} + 10 + \frac{1}{5} = \frac{173}{15} \end{aligned}$$

2.2.11 Megoldás

$$\begin{aligned} -0,04^{-\frac{1}{2}} + 100^{\lg 5} - 81^{-\frac{3}{4}} &= -\left(\frac{4}{100}\right)^{-\frac{1}{2}} + 10^{2\lg 5} - (3^4)^{-\frac{3}{4}} = \\ -\sqrt{\frac{100}{4}} + 10^{\lg 25} - 3^{-3} &= -5 + 25 - \frac{1}{27} = \frac{539}{27} \end{aligned}$$

2.2.12 Megoldás

$$3^{1+\log_9 4 - \log_{\frac{1}{3}} 5} + \frac{2}{10^{-\lg 3}} = \frac{3 \cdot 3^{\log_9 4}}{3^{\log_{\frac{1}{3}} 5}} + 2 \cdot 10^{\lg 3} = \frac{3 \cdot 9^{\frac{1}{2} \log_9 4}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-\log_{\frac{1}{3}} 5}} + 2 \cdot 3 =$$
$$\frac{3 \cdot 4^{\frac{1}{2}}}{5^{-1}} + 6 = 6 \cdot 5 + 6 = 36$$

2.2.13 Megoldás Legyen a kocka éle x , ekkor térfogata x^3 , felszíne $6x^2$, a megnövelt kocka térfogata $(x+1)^3$. A feltételekből $(x+1)^3 = x^3 + \frac{7}{6} \cdot 6x^2 \Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0$, ahonnan $x = 1$ (mivel $x > 0$). Tehát az kocka élei 1 cm-esek voltak.

2.2.14 Megoldás A ló 1 hónap alatt 1 kocsi szénát, a kecske 1 hónap alatt $\frac{1}{2}$ kocsi szénát, a juh 1 hónap alatt $\frac{1}{3}$ kocsi szénát eszik meg. A három állat együtt 1 hónap alatt $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ kocsi szénát eszik meg. Így a ló, a kecske és a juh együtt 1 kocsi szénát $\frac{6}{11}$ hónap alatt eszik meg.

2.2.15 Megoldás 5 év múlva $80000 \cdot 1,1^5 = 128840,8$ Ft-unk lesz.

2.2.16 Megoldás A csoportban összesen $40 \cdot 0,3 = 12$ kék szemű és $40 \cdot 0,4 = 16$ szőke hallgató van. Szőke és kék szemű 9 hallgató. Azon hallgatók száma, akik szőkék vagy kék szeműek, $12 + 16 - 9 = 19$. Se nem szőke, se nem kék szemű $40 - 19 = 21$ hallgató.

2.2.17 Megoldás Legyen a kisebb betét értéke x . Ekkor $0,035x + 0,04 \cdot 2x = 6325$. Innen a kisebb betét értéke $x = \frac{6325}{0,115} = 55000$ euró, a nagyobb betét értéke 110000 euró.

2.2.18 Megoldás A kis kör és a nagy kör területének aránya $\frac{T_1}{T_2} = \frac{40^2 \pi}{50^2 \pi} = \frac{16}{25} = 0,64$, tehát a kis kör területe a nagy kör területének 64%-a. Így az eredeti kör területe 36%-kal csökkent.

2.2.19 Megoldás Az $x = 1$ pontban $f(1) = 1$. Az $x = 1$ értékét 2%-kal növelve

$$f(1,02) = \frac{1,02 + 1}{1,02^2 + 1} \approx 0,99,$$

így f értéke 1%-kal csökken. Az $x = 1$ értékét 3%-kal csökkentve

$$f(0,97) = \frac{0,97 + 1}{0,97^2 + 1} \approx 1,015,$$

így f értéke 1,5%-kal nő.

2.2.20 Megoldás Ha az $x = 1$ értéke k -szorosára változik és f értéke 1%-kal nő, akkor $a \frac{k+1}{k^2+1} = 1,01 \cdot f(1)$ összefüggésből k -ra az $1,01k^2 - k + 0,01 = 0$ másodfokú egyenlet adódik, ahonnan $k_1 \approx 0,01$ és $k_2 \approx 0,98$. Tehát ahhoz, hogy f értéke 1%-kal nőjön, $x = 1$ értékét 99%-kal vagy 2%-kal kell csökkenteni.

Ha az $x = 1$ értéke k -szorosára változik és f értéke 2,5%-kal csökken, akkor $a \frac{k+1}{k^2+1} = 0,975 \cdot f(1)$ összefüggésből k -ra a $0,975k^2 - k + 0,025 = 0$ másodfokú egyenlet adódik, ahonnan $k \approx 1,05$ (mivel $k > 0$). Tehát ahhoz, hogy f értéke 2,5%-kal csökkenjen, $x = 1$ értékét 5%-kal kell növelni.

2.2.21 Megoldás Legyen a gép értéke x . Két év múlva a gépet $x \cdot 0,8^2 \cdot \frac{3}{4} = x \cdot 0,48$ -ért adták el, ami az eredeti érték 48%-a.

2.2.22 Megoldás Az első lemez átengedi a ráeső fényenergia 70%-át, a második a ráeső fényenergia 50%-át, a harmadik pedig a ráeső energia 80%-át. A három lemez együttesen az eredeti fénysugár energiájának $0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,8 = 0,28$ -szorosát engedi át. Tehát a három lemez együttesen az eredeti fénysugár energiájának 72%-át nyeli el.

2.2.23 Megoldás Legyen az üzem bevétele x . A változtatások után az új bevétel

$$x \cdot (0,8 \cdot 1,2 + 0,2 \cdot 0,8) = x \cdot 1,12,$$

tehát az üzem bevétele 12%-kal nőtt.

2.2.24 Megoldás Legyen a kabát ára x . Ha a csökkentett árat y -szorosára növelik, akkor az $x \cdot 0,8 \cdot y = x$ egyenletből $y = 1,25$, tehát 25%-kal kell növelni az árat.

2.2.25 Megoldás Legyen a két évvel ezelőtti faállomány x . Ekkor az

$$(x \cdot 0,8 + 800) \cdot 0,8 + 800 = 8000$$

egyenletből $x = 10250$ adódik.

2.2.26 Megoldás Legyen az elefánt testtömege t , amikor nagyon szomjas. Itatás után a testének víztartalmát kétféleképpen kifejezve, t -re a következő egyenlet adódik:

$$0,84t + (1600 - t) = 0,85 \cdot 1600$$

ahonnan $t = 1500$ kg.

2.3. Elemi függvények tulajdonságai, ábrázolásuk

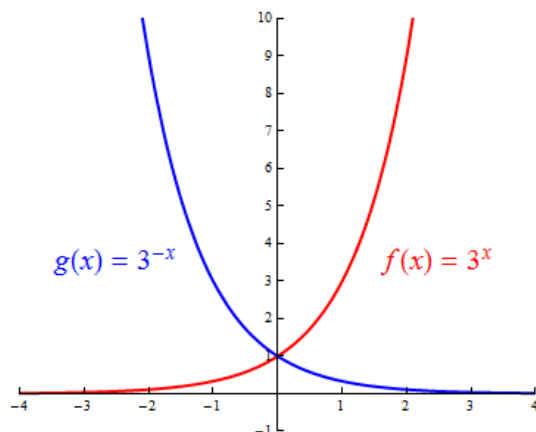
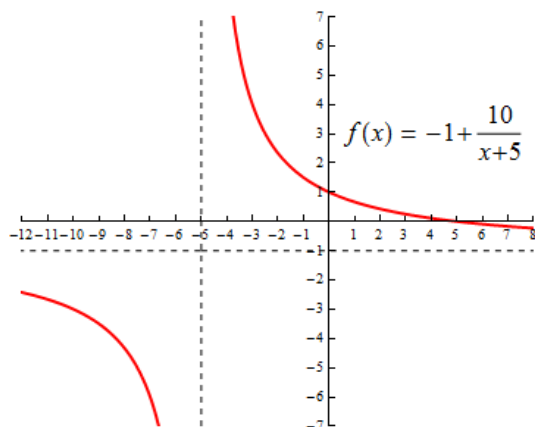
2.3.1 Megoldás Az ábrázoláshoz az f függvényt a következő alakra hozzuk:

$$f(x) = 1 - \frac{2x}{x+5} = 1 - \frac{2(x+5) - 10}{x+5} = -1 + \frac{10}{x+5}$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x+5-2x}{x+5} > 0 \Leftrightarrow \frac{5-x}{x+5} > 0 \Leftrightarrow (5-x > 0 \text{ és } x+5 > 0) \text{ vagy } (5-x < 0 \text{ és } x+5 < 0) \Leftrightarrow -5 < x < 5$$

$$f(1) + f(-1) = \left(-1 + \frac{10}{1+5}\right) + \left(-1 + \frac{10}{-1+5}\right) = -2 + \frac{10}{6} + \frac{10}{4} = \frac{13}{6}$$

Az f függvény az y tengelyt $y = f(0) = 1$ -nél metszi.



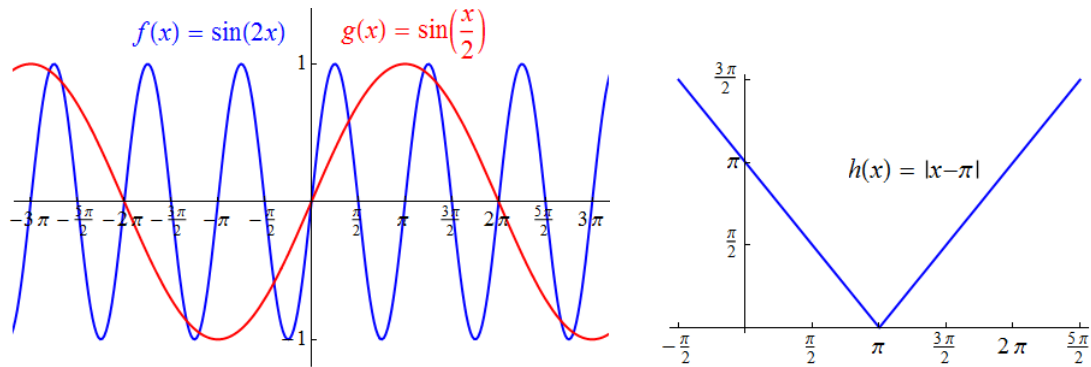
2.3.2 Megoldás

$$f(a+2) - f(a-2) = 3^{a+2} - 3^{a-2} = 3^a \cdot 9 - 3^a \cdot \frac{1}{9} = 3^a \left(9 - \frac{1}{9}\right) = \frac{80}{9} \cdot 3^a$$

$$g(a+2) - g(a-2) = 3^{-(a+2)} - 3^{-(a-2)} = 3^{-a} \cdot \frac{1}{9} - 3^{-a} \cdot 9 = 3^{-a} \left(\frac{1}{9} - 9\right) = -\frac{80}{9} \cdot 3^{-a}$$

$$f(g(x)) = 3^{g(x)} = 3^{3^{-x}}; \quad g(f(x)) = 3^{-f(x)} = 3^{-3^x}$$

2.3.3 Megoldás Az $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \sin \frac{x}{2}$ és $h(x) = |x - \pi|$ függvények közül csak a g függvény szigorúan monoton növekvő a $]0; \pi[$ nyílt intervallumon.



2.3.4 Megoldás

$$f(x) = \frac{2x(x-2)^2 - 2(x-2) \cdot x^2 \cdot 2}{(x-2)^4} = \frac{2x(x-2) - 4x^2}{(x-2)^3} = \frac{-2x^2 - 4x}{(x-2)^3} = \frac{-2x(x+2)}{(x-2)^3}$$

f értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. f zérushelyei: $x_1 = 0, x_2 = -2$.

2.3.5 Megoldás

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4(x^2-1) \cdot x \cdot x^3 - 3x^2 \cdot (x^2-1)^2}{x^6} = \frac{4x^2(x^2-1) - 3(x^2-1)^2}{x^4} = \\ &= \frac{(x^2-1)[4x^2 - 3(x^2-1)]}{x^4} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+3)}{x^4} \end{aligned}$$

f értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. f zérushelyei: $x_1 = 1, x_2 = -1$.

2.3.6 Megoldás

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x(x^2-4)^2 + 2(x^2-4) \cdot 3x \cdot x^2}{(x^2-4)^4} = \frac{2x(x^2-4) + 6x^3}{(x^2-4)^3} = \frac{8x^3 - 8x}{(x-2)^3(x+2)^3} = \\ &= \frac{8x(x-1)(x+1)}{(x-2)^3(x+2)^3} \end{aligned}$$

f értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. f zérushelyei: $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$.

2.3.7 Megoldás

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x^2(x-3)^2(x+1)^2 - (3x^2-9x)(x^2-1)^2}{(x-3)^4(x+1)^2} = \\ &= \frac{3x^2(x-3)^2(x+1)^2 - 3x(x-3)(x-1)^2(x+1)^2}{(x-3)^4(x+1)^2} = \frac{3x^2(x-3) - 3x(x-1)^2}{(x-3)^3} = \\ &= \frac{3x[x(x-3) - (x^2-2x+1)]}{(x-3)^3} = \frac{-3x(x+1)}{(x-3)^3} \end{aligned}$$

f értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. f zérushelye: $x = 0$.

2.3.8 Megoldás

$$f(g(x)) = \ln^2(g(x)) = \ln^2\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right), x \in \mathbb{R}; \quad f(g(0)) = f(1) = 0$$

$$g(f(x)) = \sqrt[3]{(f(x))^2+1} = \sqrt[3]{(\ln^2 x)^2+1} = \sqrt[3]{\ln^4 x+1}, x \in \mathbb{R}^+; \quad g(f(1)) = g(0) = 1$$

2.3.9 Megoldás

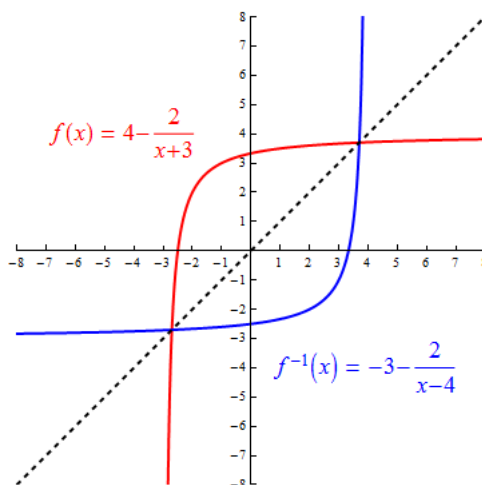
$$f(g(x)) = e^{(g(x))^2} = e^{(\sin 3x)^2}, x \in \mathbb{R}; \quad f(g(0)) = f(0) = e^0 = 1$$

$$g(f(x)) = \sin(3f(x)) = \sin\left(3e^{x^2}\right), x \in \mathbb{R}; \quad g(f(0)) = g(1) = \sin 3$$

2.3.10 Megoldás Az $f(x) = 4 - \frac{2}{x+3}$ függvény szigorúan monoton növekvő a $] -3; \infty[$ intervallumon, így létezik inverze. Az inverz meghatározása:

$$y = 4 - \frac{2}{x+3} \Rightarrow x = 4 - \frac{2}{y+3} \Rightarrow x - 4 = -\frac{2}{y+3} \Rightarrow y = -3 - \frac{2}{x-4} \Rightarrow$$

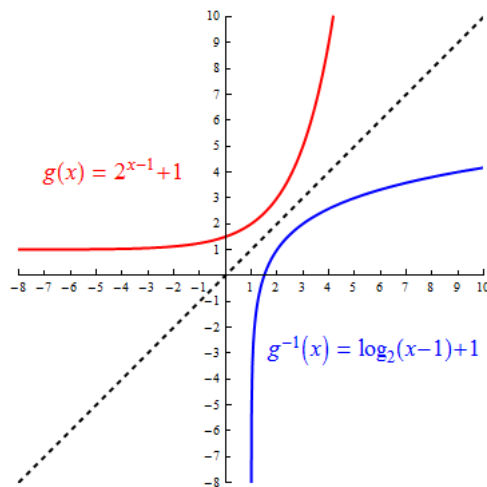
$$f^{-1}(x) = -3 - \frac{2}{x-4}, x \in] -\infty; 4[$$



2.3.11 Megoldás A $g(x) = 2^{x-1} + 1$ függvény szigorúan monoton növekvő, így létezik inverze. Az inverz meghatározása:

$$y = 2^{x-1} + 1 \Rightarrow x = 2^{y-1} + 1 \Rightarrow x - 1 = 2^{y-1} \Rightarrow y = \log_2(x - 1) + 1 \Rightarrow$$

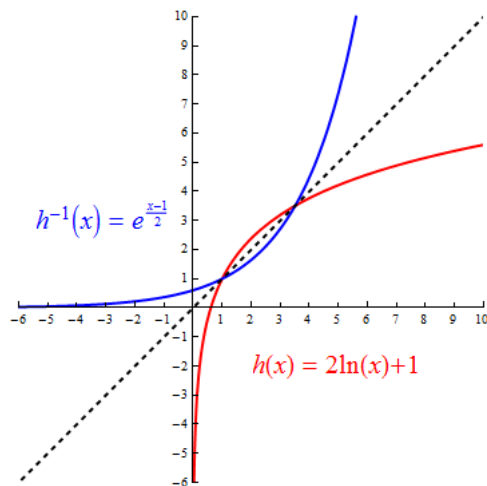
$$g^{-1}(x) = \log_2(x - 1) + 1, x \in] 1; \infty[$$



2.3.12 Megoldás A $h(x) = 2 \ln x + 1$ függvény szigorúan monoton növekvő a $]0; \infty[$ intervallumon, így létezik inverze. Az inverz meghatározása:

$$y = 2 \ln x + 1 \Rightarrow x = 2 \ln y + 1 \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \ln y \Rightarrow y = e^{\frac{x-1}{2}} \Rightarrow$$

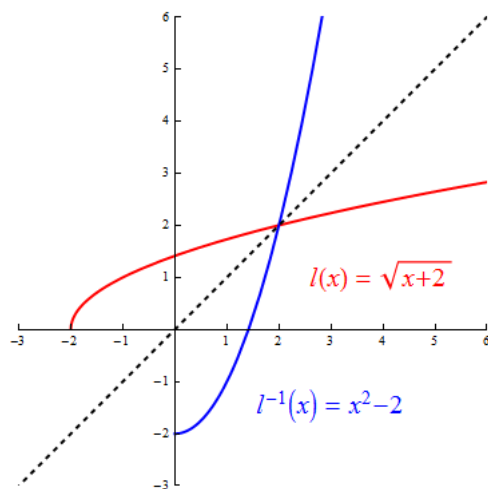
$$h^{-1}(x) = e^{\frac{x-1}{2}}, x \in \mathbb{R}$$



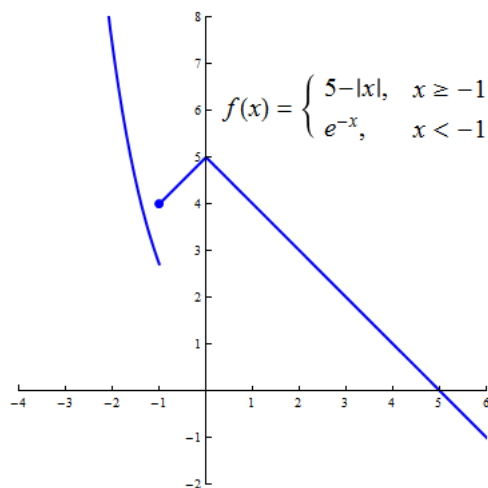
2.3.13 Megoldás Az $l(x) = \sqrt{x+2}$ függvény szigorúan monoton növekvő a $[-2; \infty[$ intervallumon, így létezik inverze. Az inverz meghatározása:

$$y = \sqrt{x+2} \Rightarrow x = y^2 - 2 \Rightarrow x^2 = y + 2 \Rightarrow y = x^2 - 2 \Rightarrow$$

$$l^{-1}(x) = x^2 - 2, x \in [0; \infty[$$

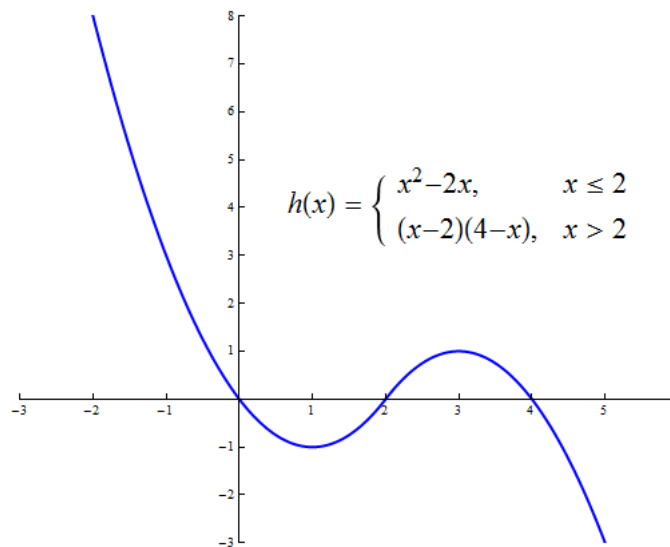
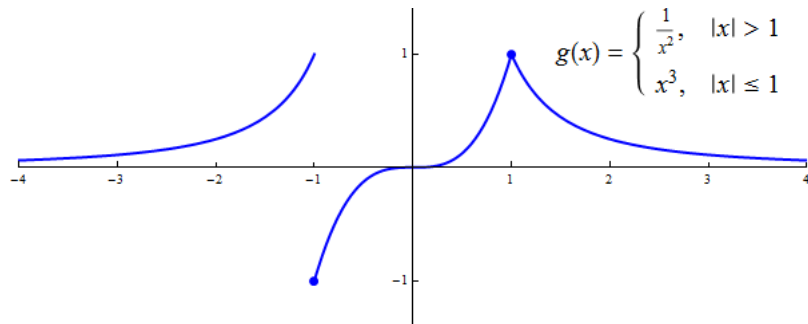


2.3.14 Megoldás $f(1) = 4$; $f(-2) = e^2$



2.3.15 Megoldás A g függvény minimális értéke a $[-3, 2]$ intervallumon -1 , melyet az $x_1 = -1$ helyen vesz fel, maximális értéke 1 , melyet az $x_2 = 1$ helyen vesz fel.

2.3.16 Megoldás A h függvény lokális minimumhelyei a $[-2, 5]$ intervallumon $x_1 = 1$ és $x_2 = 5$, az utóbi globális minimumhely is, a függvényértékek $h(1) = -1$, $h(5) = -3$. A lokális maximumhelyek $x_3 = 3$ és $x_4 = -2$, az utóbbi globális maximumhely is, a függvényértékek $h(3) = 3$, $h(-2) = 8$.



2.3.17 Megoldás f értelmezési tartománya: az $1 - 2x \geq 0$ egyenlőtlenségből $x \leq \frac{1}{2}$, azaz $D_f =] - \infty; \frac{1}{2}]$. f zérushelye: a $3 - \sqrt{1 - 2x} = 0$ egyenletből $x = -4$.

2.3.18 Megoldás f értelmezési tartománya: az $5 - |x + 2| \geq 0$ egyenlőtlenségből $|x + 2| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x + 2 \leq 5 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 3$, azaz $D_f = [-7; 3]$. f zérushelyei: az $5 - |x + 2| = 0$ egyenletből $x + 2 = \pm 5$, így $x_1 = -7$ és $x_2 = 3$.

2.3.19 Megoldás A logaritmus definíciója miatt $x - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x} > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1 > 0 \text{ és } x > 0)$ vagy $(x^2 - 1 < 0 \text{ és } x < 0) \Leftrightarrow x > 1$ vagy $-1 < x < 0$, tehát f értelmezési tartománya: $D_f =] - 1; 0[\cup] 1; \infty[$.

f zérushelyei: az $x - \frac{1}{x} = 1$ egyenletből $x^2 - x - 1 = 0$, ahonnan $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

2.3.20 Megoldás A logaritmus definíciója miatt $5 - |1 - x| > 0 \Leftrightarrow |1 - x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x - 1 < 5 \Leftrightarrow -4 < x < 6$, tehát f értelmezési tartománya: $D_f =] - 4; 6[$.
 f zérushelyei: az $5 - |1 - x| = 1$ egyenletből $|x - 1| = 4$, ahonnan $x_1 = -3$ és $x_2 = 5$.

2.3.21 Megoldás A logaritmus definíciója miatt $2 + x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$, tehát f értelmezési tartománya: $D_f =] - 1; 2[$.
 f zérushelyei: a $2 + x - x^2 = 1$ egyenletből $x^2 - x - 1 = 0$, ahonnan $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

2.3.22 Megoldás f értelmezési tartománya: a $2 + \log_3 x \geq 0$ egyenlőtlenségből
 $\log_3 x \geq -2 = \log_3 \frac{1}{9}$, így $x \geq \frac{1}{9}$, azaz $D_f = [\frac{1}{9}; \infty[$. f zérushelye: a $2 + \log_3 x = 0$ egyenletből $x = \frac{1}{9}$.

2.3.23 Megoldás A $g(x) = f(x) + 5$ függvény páratlan, így $g(-x) = -g(x)$. Ezt felhasználva $g(-7) = -g(7) = f(-7) + 5 = 7 + 5 = 12$, tehát $g(7) = -12$. Így $f(7) = g(7) - 5 = -17$.

2.4. Algebrai egyenletek és egyenlőtlenségek

2.4.1 Megoldás Ha $x \geq 3$, akkor $|x - 3| = x - 3$, így az egyenlet: $x + 2(x - 3) = 9$, ahonnan $x = 5$. Ha $x < 3$, akkor $|x - 3| = -(x - 3)$, így az egyenlet: $x - 2(x - 3) = 9$, ahonnan $x = -3$. Tehát a megoldás: $x_1 = 5$, $x_2 = -3$.

2.4.2 Megoldás Ha $x \leq 0$ vagy $x \geq 2$, akkor $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$, így az egyenlet: $x^2 - 2x - 1 = 0$, ahonnan $x = 1 + \sqrt{2}$ vagy $x = 1 - \sqrt{2}$. Ha $0 < x < 2$, akkor $|x^2 - 2x| = -(x^2 - 2x)$, így az egyenlet: $-x^2 + 2x - 1 = 0$, ahonnan $x = 1$. Tehát a megoldás: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$, $x_3 = 1$.

2.4.3 Megoldás Ha $x \geq 0$, akkor $|x| = x$, így az egyenlet: $x^2 + 7x - 8 = 0$
 $\Rightarrow (x - 1)(x + 8) = 0$, ahonnan $x = 1$ vagy $x = -8$, de ez utóbbi nem lehet a feltétel miatt. Ha $x < 0$, akkor $|x| = -x$, így az egyenlet: $x^2 - 7x - 8 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 8) = 0$, ahonnan $x = -1$ vagy $x = 8$, de ez utóbbi nem lehet a feltétel miatt. Tehát a megoldás: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

2.4.4 Megoldás Ha $x \leq -3$ vagy $x \geq 0$, akkor az egyenlet: $(x^2 + 3x) + x^2 - 2 = 0$, ahonnan $x = \frac{1}{2}$ vagy $x = -2$, de ez utóbbi nem lehet a feltétel miatt. Ha $-3 < x < 0$, akkor az egyenlet: $-(x^2 + 3x) + x^2 - 2 = 0$, ahonnan $x = -\frac{2}{3}$. Tehát a megoldás: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$.

2.4.5 Megoldás Ha $x \geq 1$, akkor az egyenlet: $\frac{6}{x} = -2(x-1) + 6 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0$, ahonnan $x = 1$ vagy $x = 3$. Ha $x < 1$, akkor az egyenlet: $\frac{6}{x} = -2(-x+1) + 6 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0$, ahonnan $x = -3$ vagy $x = 1$, de ez utóbbi megoldást már megkaptuk. Tehát a megoldás: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$.

2.4.6 Megoldás $\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-4)^2} = 10 \Leftrightarrow |x+3| + |x-4| = 10$. Ha $x \geq 4$, akkor az egyenlet: $(x+3) + (x-4) = 10$, ahonnan $x = \frac{11}{2}$. Ha $-3 \leq x < 4$, akkor az egyenlet: $(x+3) - (x-4) = 10$, ami ellentmondásra vezet. Ha $x < -3$, akkor az egyenlet: $-(x+3) - (x-4) = 10$, ahonnan $x = -\frac{9}{2}$. Tehát a megoldás: $x_1 = \frac{11}{2}$, $x_2 = -\frac{9}{2}$.

2.4.7 Megoldás $|2x-1| < 4 \Leftrightarrow -4 < 2x-1 < 4 \Leftrightarrow -3 < 2x < 5 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$

2.4.8 Megoldás $\sqrt{x^2 - 8x + 16} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2} \geq 3 \Leftrightarrow |x-4| \geq 3 \Leftrightarrow x-4 \geq 3$ vagy $x-4 \leq -3 \Leftrightarrow x \geq 7$ vagy $x \leq 1$.

2.4.9 Megoldás $|x^2 - 5| > 4 \Leftrightarrow x^2 - 5 > 4$ vagy $x^2 - 5 < -4 \Leftrightarrow x^2 > 9$ vagy $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| > 3$ vagy $|x| < 1 \Leftrightarrow x < -3$ vagy $x > 3$ vagy $-1 < x < 1$.

2.4.10 Megoldás Ha $x \geq 3$, akkor az egyenlőtlenség: $x-3 \geq 1-2x$, ahonnan $x \geq \frac{4}{3} \Rightarrow x \geq 3$. Ha $x < 3$, akkor az egyenlőtlenség: $-(x-3) \geq 1-2x$, ahonnan $x \geq -2 \Rightarrow -2 \leq x < 3$. Tehát a megoldás: $x \geq -2$.

2.4.11 Megoldás

$$\left(1 + \frac{4}{x^2 + x - 6}\right) \cdot \left(\frac{1}{x+1} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x - 6} \cdot \frac{x+2}{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-2)} \cdot \frac{x+2}{x+1} = 0 \Rightarrow x \neq -3, x \neq -1, x \neq 2$$

A megoldás: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

2.4.12 Megoldás

$$x^4 + 5x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + 5x - 6) = 0 \Leftrightarrow x^2(x+6)(x-1) = 0$$

A megoldás: $x_1 = 0$, $x_2 = -6$, $x_3 = 1$.

2.4.13 Megoldás $\frac{x+3}{x-4} + \frac{22}{x^2-16} = \frac{7x+6}{x+4} - \frac{3}{x-4} \Rightarrow x \neq \pm 4.$

Az egyenletet $x^2 - 16$ -tal szorozva:

$$(x+3)(x+4) + 22 = (7x+6)(x-4) - 3(x+4) \Leftrightarrow x^2 + 7x + 34 = 7x^2 - 25x - 36 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 16x - 35 = 0$$

A megoldás: $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = 7.$

2.4.14 Megoldás $\frac{3-7x}{2x+4} - \frac{1,5-3,5x}{x+2} = 0 \Rightarrow x \neq -2.$ Az egyenletet $2(x+2)$ -vel szorozva azonosságot kapunk: $(3-7x) - (3-7x) = 0.$ A megoldás: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$

2.4.15 Megoldás

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12} = 2 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-4)} = 2 \Rightarrow x \neq 3 \\ \Rightarrow \frac{x-2}{x-4} = 2 \Rightarrow x-2 = 2(x-4) \Rightarrow x = 6$$

A megoldás: $x = 6.$

2.4.16 Megoldás $\frac{2x}{x+2} - \frac{x+2}{2-x} = \frac{x^2+12}{x^2-4} \Rightarrow x \neq \pm 2.$

Az egyenletet $x^2 - 4$ -gyel szorozva:

$$2x(x-2) + (x+2)^2 = x^2 + 12 \Leftrightarrow 3x^2 + 4 = x^2 + 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Ez nem lehet a feltétel miatt, így az egyenletnek nincs megoldása.

2.4.17 Megoldás A $y := x^2 \geq 0$ változó bevezetésével y -ra másodfokú egyenlet adódik: $4y^2 - 3y - 1 = 0$, melynek gyökei $y_1 = 1$ és $y_2 = -\frac{1}{4}$, de ez utóbbi nem lehet a feltétel miatt. A megoldás: $x_1 = 1, x_2 = -1.$

2.4.18 Megoldás Az egyenlőtlenséget 0-ra rendezve:

$$2x - \frac{3}{x-1} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{2x(x-1) - 3 - 3(x-1)}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 5x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x(2x-5)}{x-1} > 0$$

A tört pontosan akkor pozitív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű. A számláló $x < 0$ vagy $x > \frac{5}{2}$ esetén pozitív, $0 < x < \frac{5}{2}$ esetén negatív. A nevező $x > 1$ esetén pozitív, $x < 1$ esetén negatív. A megoldás: $0 < x < 1$ vagy $x > \frac{5}{2}.$

2.4.19 Megoldás Az egyenlőtlenséget 0-ra rendezve:

$$\frac{x}{x-1} > \frac{2}{x+4} \Leftrightarrow \frac{x(x+4) - 2(x-1)}{(x-1)(x+4)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 2}{(x-1)(x+4)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2 + 1}{(x-1)(x+4)} > 0$$

A számláló minden x -re pozitív, így a tört pontosan akkor pozitív, ha a nevező is pozitív, azaz $x < -4$ vagy $x > 1$.

2.4.20 Megoldás $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x - 6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{(x-6)(x+1)} \geq 0$. A tört pontosan akkor nemnegatív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű, vagy a számláló nulla. A számláló nulla vagy pozitív, ha $x \leq 2$ vagy $x \geq 3$, és negatív, ha $2 < x < 3$. A nevező pozitív, ha $x < -1$ vagy $x > 6$, és negatív, ha $-1 < x < 6$. A megoldás: $x < -1$ vagy $2 \leq x \leq 3$ vagy $x > 6$.

2.4.21 Megoldás Az egyenlőtlenséget 0-ra rendezve:

$$2 - \frac{x-1}{x} < \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x(x+1) - (x-1)(x+1) - x^2}{x(x+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x(x+1)} < 0$$

A tört pontosan akkor negatív, ha a számláló és a nevező különböző előjelű. A számláló $x > -\frac{1}{2}$ esetén pozitív, $x < -\frac{1}{2}$ esetén negatív. A nevező $x < -1$ vagy $x > 0$ esetén pozitív, $-1 < x < 0$ esetén negatív. A megoldás: $x < -1$ vagy $-\frac{1}{2} < x < 0$.

2.4.22 Megoldás $(x+2)(x+b) = x^2 + cx + 6 \Leftrightarrow x^2 + (b+2)x + 2b = x^2 + cx + 6$
Az egyenlőség pontosan akkor teljesül minden x valós számra, ha a két polinom megfelelő együtthatói egyenlők, azaz $b+2 = c$ és $2b = 6$. Innen $b = 3$ és $c = 5$.

2.4.23 Megoldás Ha a másodfokú tag együtthatója 1, akkor az egyenlet gyöktényezős alakja

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow 6x^2 - x - 1 = 0$$

2.4.24 Megoldás $(ax-1)^2 + (x-a)^2 = x^2 - 2 + a^2 \Leftrightarrow a^2x^2 - 4ax + 3 = 0$. Az egyenletnek $a = 0$ esetén nincs megoldása, $a \neq 0$ esetén a megoldás:

$$x_{1,2} = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{2a^2} = \frac{2a \pm |a|}{2a^2} = \frac{2a \pm a}{2a^2} = \frac{2 \pm 1}{a} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{a}, x_2 = \frac{3}{a}$$

2.4.25 Megoldás $(ax+1)^2 + (ax+1)(ax-1) = 4 \Leftrightarrow a^2x^2 + ax - 2 = 0$. Az egyenletnek $a = 0$ esetén nincs megoldása, $a \neq 0$ esetén a megoldás:

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2}}{2a^2} = \frac{-a \pm 3|a|}{2a^2} = \frac{-a \pm 3a}{2a^2} = \frac{-1 \pm 3}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{a}, x_2 = -\frac{2}{a}$$

2.4.26 Megoldás Az $(1-a)x^2 + x + a = 0$ egyenletnek $a = 1$ esetén $x = -1$ megoldása. Ha $a \neq 1$, akkor

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a(1-a)}}{2(1-a)} = \frac{-1 \pm |2a-1|}{2(1-a)} = \frac{-1 \pm (2a-1)}{2(1-a)} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{a}{a-1}$$

2.4.27 Megoldás Az $x^2 + px + q = 0$ polinom gyökeinek összege: $x_1 + x_2 = -p$, a gyökök szorzata: $x_1 x_2 = q$. Így

$$1. \quad x_1 + x_1 x_2 + x_2 = (x_1 + x_2) + x_1 x_2 = -p + q$$

$$2. \quad (x_1 + x_2)^2 = (-p)^2 = p^2$$

$$3. \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q$$

$$4. \quad (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = p^2 - 4q$$

$$5. \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{p}{q}$$

2.4.28 Megoldás

$$x_1 x_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{p+2}{p^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{p+2-p^2}{p^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{p^2-p-2}{p^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{(p-2)(p+1)}{p^2} < 0$$

A megoldás: $-1 < p < 0$ vagy $0 < p < 2$.

2.4.29 Megoldás Az egyenletnek pontosan akkor van két azonos megoldása, ha a diszkrimináns nulla.

$$D = k^2 - 4(3-k) = 0 \Leftrightarrow k^2 + 4k - 12 = 0 \Leftrightarrow (k+6)(k-2) = 0$$

A megoldás: $k_1 = -6, k_2 = 2$.

2.4.30 Megoldás Az egyenletnek pontosan akkor van két különböző valós megoldása, ha a diszkrimináns pozitív.

$$D = (k+3)^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow k^2 + 6k - 7 > 0 \Leftrightarrow (k+7)(k-1) > 0$$

A megoldás: $k < -7$ vagy $k > 1$.

2.4.31 Megoldás Az egyenletnek pontosan nincs valós megoldása, ha a diszkrimináns negatív.

$$D = k^2 + 4(2k-5) < 0 \Leftrightarrow k^2 + 8k - 20 < 0 \Leftrightarrow (k+10)(k-2) < 0$$

A megoldás: $-10 < k < 2$.

2.4.32 Megoldás Mivel a parabola csúcspontja $(1, -1)$ és átmegy a $(2, 0)$ ponton, ezért átmegy a $(0, 0)$ ponton is, hiszen szimmetrikus az $x = 1$ egyenletű egyenesre. A három pont koordinátáit behelyettesítve a parabola egyenletébe, a következő egyenletrendszert kapjuk: $-1 = a + b + c$, $0 = 4a + 2b + c$, $0 = c$, ahonnan $a = 1$, $b = -2$. A parabola egyenlete: $y = x^2 - 2x$.

2.4.33 Megoldás

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^2 + 2x + 5 = -3 \left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \right) = -3 \left[\left(x - \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{5}{3} \right] = \\ &= -3 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{16}{3} \end{aligned}$$

A maximum értéke $\frac{16}{3}$.

2.4.34 Megoldás

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 5x + 1 = 2 \left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} \right) = 2 \left[\left(x - \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{25}{16} + \frac{1}{2} \right] = \\ &= 2 \left(x - \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{17}{8} \end{aligned}$$

A minimum értéke $-\frac{17}{8}$.

2.5. Gyökös, exponenciális, logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek

2.5.1 Megoldás A négyzetgyökjel alatti kifejezések nemnegatívak, azaz $\frac{2}{3} - 5x \geq 0$ és $3x + \frac{1}{2} \geq 0$, így $-\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{2}{15}$ lehet csak. $\sqrt{\frac{2}{3} - 5x} - \sqrt{3x + \frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} - 5x = 3x + \frac{1}{2}$, ahonnan a megoldás: $x = \frac{1}{48}$.

2.5.2 Megoldás A négyzetgyökjel alatti kifejezések nemnegatívak, azaz $x + 2 \geq 0$ és $1 - 3x \geq 0$, így $-2 \leq x \leq \frac{1}{3}$ lehet csak. Mivel $\sqrt{x+2} \geq 0$ és $\sqrt{1-3x} \geq 0$, ezért az összegük csak úgy lehet 0, ha mindkét kifejezés értéke 0, azaz $x + 2 = 0$ és $1 - 3x = 0$. Ez azonban ellentmondásra vezet, így a feladatnak nincs megoldása.

2.5.3 Megoldás A négyzetgyökjel alatti kifejezés nemnegatív, azaz $10 - x \geq 0$. Mivel a bal oldal nemnegatív, ezért $x - 10 \geq 0$ is teljesül, így a megoldás: $x = 10$.

2.5.4 Megoldás A négyzetgyökjel alatti kifejezés nemnegatív, azaz $4x - 7 \geq 0$, így $x \geq \frac{7}{4}$. Mivel a bal oldal nemnegatív, ezért $1 - x \geq 0$ is teljesül, azaz $x \leq 1$. Ez azonban ellentmondás, így a feladatnak nincs megoldása.

2.5.5 Megoldás A négyzetgyökjel alatti kifejezés nemnegatív, azaz $2x^2 - 3x - 10 \geq 0$, ahonnan $x \leq \frac{3 - \sqrt{89}}{4} \approx -1,6$ vagy $x \geq \frac{3 + \sqrt{89}}{4} \approx 3,1$. Az egyenletet átrendezve: $\sqrt{2x^2 - 3x - 10} = x$. Mivel a bal oldal nemnegatív, ezért $x \geq 0$ is teljesül, így megoldásként csak 3,1-nél nagyobb értékek jöhetnek szóba. Négyzetre emelve: $2x^2 - 3x - 10 = x^2 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2) = 0$, ahonnan $x = 5$ vagy $x = -2$, de ez utóbbi nem lehet, tehát a megoldás: $x = 5$.

2.5.6 Megoldás A négyzetgyökjel alatti kifejezések nemnegatívak, azaz $2 - x \geq 0$ és $x + 7 \geq 0$, így $-7 \leq x \leq 2$. Az egyenletet átrendezve: $\sqrt{2 - x} = \sqrt{x + 7} - 3$. Mivel a bal oldal nemnegatív, ezért $\sqrt{x + 7} - 3 \geq 0$ is teljesül, ahonnan $x + 7 \geq 9$, azaz $x \geq 2$. A feltételekből csak $x = 2$ jöhet szóba, ami megoldása az egyenletnek.

2.5.7 Megoldás A négyzetgyökjel alatti kifejezések nemnegatívak, azaz $x - 4 \geq 0$, $x - 1 \geq 0$ és $x + 4 \geq 0$, ahonnan $x \geq 4$. Négyzetre emelve:

$$x - 4 + 2\sqrt{(x - 4)(x - 1)} + x - 1 = x + 4 \Rightarrow 2\sqrt{(x - 4)(x - 1)} = 9 - x$$

Ismét négyzetre emelve: $4(x^2 - 5x + 4) = x^2 - 18x + 81 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 65 = 0$, ahonnan $x = 5$ vagy $x = -\frac{13}{3}$, de ez utóbbi nem lehet, tehát a megoldás: $x = 5$.

2.5.8 Megoldás Legyen $y := \sqrt[3]{x}$. Ekkor $x + 3\sqrt[3]{x^2} - 18\sqrt[3]{x} = 0 \Leftrightarrow y^3 + 3y^2 - 18y = 0 \Leftrightarrow y(y^2 + 3y - 18) = 0 \Leftrightarrow y(y + 6)(y - 3) = 0$, ahonnan $y_1 = 0$, $y_2 = -6$, $y_3 = 3$. A megoldás: $x_1 = 0$, $x_2 = -216$, $x_3 = 27$.

2.5.9 Megoldás A négyzetgyökjel alatti kifejezések nemnegatívak, továbbá a tört nevezője nem 0, így $9 - 5x \geq 0$ és $3 - x > 0$, ahonnan $x \leq \frac{9}{5}$. Négyzetre emelve: $9 - 5x = 3 - x + 12 + \frac{36}{3 - x} \Rightarrow \frac{18}{x - 3} = 2x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 27 = 0$, ahonnan $x = -3$ vagy $x = \frac{9}{2}$, de ez utóbbi nem lehet, így a megoldás: $x = -3$.

2.5.10 Megoldás *Feltételek:* $x + 1 \geq 0$, $\sqrt{x + 1} - 1 \neq 0$ és $x - 2 \neq 0$, azaz $x \geq -1$, $x \neq 0$ és $x \neq 2$. Legyen $a := \sqrt{x + 1} \geq 0$. Ekkor

$$\frac{\sqrt{x + 1} + 2}{\sqrt{x + 1} - 1} = \frac{x + 1}{x - 2} \Rightarrow \frac{a + 2}{a - 1} = \frac{a^2}{a^2 - 3} \Rightarrow (a + 2)(a^2 - 3) = a^2(a - 1) \Rightarrow$$

$$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0$$

Mivel $a + 1 > 0$, ezért $a = 2$, tehát a megoldás: $x = 3$.

2.5.11 Megoldás *Feltétel:* $x \geq -2$. Legyen $a := \sqrt{x + 2} \geq 0$. Ekkor

$$\sqrt{x + 6 - 4\sqrt{x + 2}} + \sqrt{x + 11 - 6\sqrt{x + 2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 4 - 4a} + \sqrt{a^2 + 9 - 6a} = 1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{(a - 2)^2} + \sqrt{(a - 3)^2} = 1 \Rightarrow |a - 2| + |a - 3| = 1$$

Ha $a \geq 3$, akkor az egyenlet: $(a - 2) + (a - 3) = 1$, ahonnan $a = 3$, így $x = 7$.

Ha $2 \leq a < 3$, akkor az egyenlet: $(a - 2) - (a - 3) = 1$, ami azonosság, ahonnan $2 \leq \sqrt{x + 2} < 3$, így $2 \leq x < 7$.

Ha $0 \leq a < 2$, akkor az egyenlet: $-(a - 2) - (a - 3) = 1$, ahonnan $a = 2$, de ez nem lehet.

A megoldás: $2 \leq x \leq 7$.

2.5.12 Megoldás Az egyenlőtlenséget átalakítva: $(x + 2)\sqrt{(x - 1)^2 + 2} \geq 0$. Mivel a gyökjel alatti kifejezés pozitív, ezért az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $x \geq -2$.

2.5.13 Megoldás *Feltétel:* $4x + 17 \geq 0$, azaz $x \geq -\frac{17}{4}$. A bal oldal nemnegatív, így az egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül, ha $x + 3 < 0$, azaz $-\frac{17}{4} \leq x < -3$. Ha $x \geq -3$, akkor mindkét oldal nemnegatív, így négyzetre emelve:

$$4x + 17 > x^2 + 6x + 9 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 2) < 0 \Rightarrow -4 < x < 2,$$

ahonnan $-3 \leq x < 2$. A megoldás: $-\frac{17}{4} \leq x < 2$.

2.5.14 Megoldás $2^{|x+1|+x} = 2 \Rightarrow |x + 1| + x = 1$. Ha $x \geq -1$, akkor az egyenlet: $(x + 1) + x = 1$, ahonnan $x = 0$. Ha $x < -1$, akkor az egyenlet: $-(x + 1) + x = 1$, ami ellentmondásra vezet. A megoldás: $x = 0$.

2.5.15 Megoldás

$$3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 39 \Rightarrow 3^x \left(\frac{1}{3} + 1 + 3 \right) = 39 \Rightarrow 3^x \cdot \frac{13}{3} = 39 \Rightarrow 3^x = 9$$

A megoldás: $x = 2$.

2.5.16 Megoldás

$$2^x(1 + 38 \cdot 2 + 4) = 3^x(1 + 2 \cdot 3 + 9) \Rightarrow 2^x \cdot 81 = 3^x \cdot 16 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

A megoldás: $x = 4$.

2.5.17 Megoldás

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2x+3}{2x-1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x+9}{2x+2}} \Rightarrow \frac{2x+3}{2x-1} = 2 \cdot \frac{x+9}{2x+2} \Rightarrow (2x+3)(x+1) = (x+9)(2x-1) \Rightarrow$$
$$2x^2 + 5x + 3 = 2x^2 + 17x - 9 \Rightarrow 12x = 12$$

A megoldás: $x = 1$.

2.5.18 Megoldás Feltétel: $x \neq -3$.

$$3^{2x^2+2x-12} = 9^{\frac{x-2}{x+3}} \Rightarrow 9^{x^2+x-6} = 9^{\frac{x-2}{x+3}} \Rightarrow (x+3)(x-2) = \frac{x-2}{x+3} \Rightarrow$$
$$(x+3)^2(x-2) - (x-2) = 0 \Rightarrow (x-2)[(x+3)^2 - 1] = 0 \Rightarrow$$
$$(x-2)(x+2)(x+4) = 0$$

A megoldás: $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = -4$.

2.5.19 Megoldás

$$\left(\frac{25}{4}\right)^2 \left(\frac{8}{125}\right)^{3x-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{1-x} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^4 \left(\frac{5}{2}\right)^{-3(3x-1)} = \left(\frac{5}{2}\right)^{1-x} \Rightarrow 4 - 9x + 3 = 1 - x$$

A megoldás: $x = \frac{3}{4}$.

2.5.20 Megoldás

$$2^{3x+4} \cdot \frac{8^{2x-1}}{\sqrt{16^{x+1}}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{2-x} \Rightarrow 2^{3x+4} \cdot 2^{3(2x-1)} \cdot 2^{-2(x+1)} = 2^{-6(2-x)} \Rightarrow$$
$$2^{7x-1} = 2^{-12+6x} \Rightarrow 7x - 1 = -12 + 6x$$

A megoldás: $x = -11$.

2.5.21 Megoldás Legyen $a := 5^x > 0$. Ekkor az egyenlet:

$$a = \frac{1}{a} + \frac{24}{5} \Rightarrow 5a^2 - 24a - 5 = 0$$

ahonnan $a = 5$ vagy $a = -\frac{1}{5}$, de ez utóbbi nem lehet. Így a megoldás: $x = 1$.

2.5.22 Megoldás

$$\frac{1+4^{x-1}}{4^x} = \frac{17}{2^{x+3}} \Rightarrow 8(1+4^{x-1}) = 17 \cdot 2^x \Rightarrow 8 + 2 \cdot 4^x = 17 \cdot 2^x \Rightarrow$$
$$2 \cdot (2^x)^2 - 17 \cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow 2^x = \frac{17 \pm 15}{4}$$

Innen $2^x = 8$ vagy $2^x = \frac{1}{2}$, így a megoldás: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

2.5.23 Megoldás Feltétel: $x \geq 0$.

$$4^x - 4^{\sqrt{x}+1} = 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}} \Rightarrow (2^x)^2 - 4 \cdot (2^{\sqrt{x}})^2 = 3 \cdot 2^x \cdot 2^{\sqrt{x}}$$

Legyen $a := 2^x > 0$ és $b := 2^{\sqrt{x}} > 0$. Ekkor az egyenlet:

$$a^2 - 3ab - 4b^2 = 0 \Rightarrow (a - 4b)(a + b) = 0$$

Mivel $a + b > 0$, ezért az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = 4b$, így

$$2^x = 4 \cdot 2^{\sqrt{x}} \Rightarrow 2^x = 2^{2+\sqrt{x}} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{x} \Rightarrow$$
$$(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1) = 0$$

Mivel $\sqrt{x} + 1 > 0$, ezért az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\sqrt{x} = 2$, így a megoldás: $x = 4$.

Megjegyzés: A feladat úgy is megoldható, hogy az $a^2 - 3ab - 4b^2 = 0$ egyenletet b^2 -tel ($b > 0$) elosztjuk, így $\frac{a}{b}$ -re másodfokú egyenletet kapunk: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{b}\right) - 4 = 0$.

2.5.24 Megoldás Legyen $a := 3^x > 0$. Ekkor

$$\sqrt{9^x + 8 - 3^{x+2}} > 3^x - 5 \Rightarrow \sqrt{a^2 - 9a + 8} > a - 5 \Rightarrow \sqrt{(a-8)(a-1)} > a - 5$$

Feltétel: $a \leq 1$ vagy $a \geq 8$, mivel a négyzetgyökjel alatti kifejezés nemnegatív. Ha $a \leq 1$, akkor a jobb oldal negatív, így az egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül. Innen $3^x \leq 1$, így $x \leq 0$. Ha $a \geq 8$, akkor a jobb oldal pozitív, így négyzetre emelve:

$$a^2 - 9a + 8 > a^2 - 10a + 25,$$

ahonnan $3^x > 17$, így $x > \log_3 17$. A megoldás: $x \leq 0$ vagy $x > \log_3 17$.

2.5.25 Megoldás

$$4^{3-|x|} < 32 \Rightarrow 2^{6-2|x|} < 2^5 \Rightarrow 6 - 2|x| < 5 \Rightarrow |x| > \frac{1}{2}$$

A megoldás: $x < -\frac{1}{2}$ vagy $x > \frac{1}{2}$.

2.5.26 Megoldás

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{10-3x} \leq \frac{49}{4} \Rightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^{10-3x} \leq \left(\frac{2}{7}\right)^{-2} \Rightarrow 10-3x \geq -2$$

A megoldás: $x \leq 4$.

2.5.27 Megoldás

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x-17} > \frac{1}{27} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x-17} > \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow x^2-x-17 < 3 \Rightarrow (x-5)(x+4) < 0$$

A megoldás: $-4 < x < 5$.

2.5.28 Megoldás Feltétel: $x > 10$. Azonos átalakításokkal:

$$\lg(x-10) = 2(1-\lg 5) = 2-2\lg 5 = \lg 100 - \lg 5^2 = \lg \frac{100}{25} = \lg 4$$

Így $\lg(x-10) = \lg 4 \Rightarrow x-10 = 4$, tehát a megoldás: $x = 14$.

2.5.29 Megoldás Feltételek: $x+4 > 0$, $x+2 > 0$ és $\log_7(x+2) \neq 0$, ahonnan $x > -2$ és $x \neq -1$.

$$\frac{\log_7(x+4)}{\log_7(x+2)} = 2 \Rightarrow \log_7(x+4) = 2\log_7(x+2) \Rightarrow \log_7(x+4) = \log_7(x+2)^2 \Rightarrow x+4 = (x+2)^2 \Rightarrow x^2+3x=0 \Rightarrow x(x+3)=0$$

Innen $x = 0$ vagy $x = -3$, de ez utóbbi nem lehet, így a megoldás: $x = 0$.

2.5.30 Megoldás Feltételek: $x-5 > 0$ és $2x-3 > 0$, ahonnan $x > 5$.

$$\lg \sqrt{x-5} + \lg \sqrt{2x-3} + 1 = \lg 30 \Rightarrow \lg \sqrt{(x-5)(2x-3)} = \lg 30 - \lg 10 = \lg 3 \Rightarrow \sqrt{(x-5)(2x-3)} = 3 \Rightarrow (x-5)(2x-3) = 9 \Rightarrow 2x^2-13x+6=0 \Rightarrow x = \frac{13 \pm 11}{4}$$

innen $x = 6$ vagy $x = \frac{1}{2}$, de ez utóbbi nem lehet, így a megoldás: $x = 6$.

2.5.31 Megoldás Feltételek: $(x-4)(x+3) > 0$ (azaz $x < -3$ vagy $x > 4$) és $5x+4 > 0$, ahonnan $x > 4$.

$$\log_3[(x-4)(x+3)] = \log_3(5x+4) \Rightarrow (x-4)(x+3) = 5x+4 \Rightarrow x^2-6x-16=0 \Rightarrow (x-8)(x+2)=0$$

ahonnan $x = 8$ vagy $x = -2$, de ez utóbbi nem lehet, így a megoldás: $x = 8$.

2.5.32 Megoldás *Feltételek:* $23x + 8$ és $4x + 4 > 0$, ahonnan $x > -\frac{8}{23}$.

$$\log_8(23x + 8) - 2\log_8(4x + 4) = -\frac{2}{3} \Rightarrow \log_8 \frac{23x + 8}{(4x + 4)^2} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{23x + 8}{(4x + 4)^2} = 8^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\frac{23x + 8}{16(x + 1)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 23x + 8 = 4(x + 1)^2 \Rightarrow 4x^2 - 15x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{15 \pm 17}{8}$$

A megoldás: $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{1}{4}$.

2.5.33 Megoldás *Feltételek:* $x^2 - 3x = x(x - 3) > 0$ (azaz $x < 0$ vagy $x > 3$) és $3 - x > 0$, ahonnan $x < 0$.

$$\lg \sqrt{x^2 - 3x} - \lg \sqrt{3 - x} = \lg 5 \Rightarrow \lg \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{\sqrt{3 - x}} = \lg 5 \Rightarrow \lg \sqrt{\frac{x(x - 3)}{3 - x}} = \lg 5 \Rightarrow$$

$$\lg \sqrt{-x} = \lg 5 \Rightarrow \sqrt{-x} = 5 \Rightarrow -x = 25$$

A megoldás: $x = -25$.

2.5.34 Megoldás *Feltételek:* $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3) > 0$, azaz $x < -3$ vagy $x > 1$.
Ekkor $\frac{x - 1}{x + 3} > 0$ is teljesül.

$$\ln(x^2 + 2x - 3) = \ln \frac{x - 1}{x + 3} \Rightarrow (x - 1)(x + 3) = \frac{x - 1}{x + 3} \Rightarrow$$

$$(x + 3)^2(x - 1) - (x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1) [(x + 3)^2 - 1] = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 1)(x + 2)(x + 4) = 0$$

Innen a feltétel figyelembevételével a megoldás: $x = -4$.

2.5.35 Megoldás Felhasználva, hogy $2\lg 2 - 1 = \lg 4 - \lg 10 = \lg \frac{2}{5}$, az egyenlet a következő alakra hozható: $\lg \frac{2(x^3 + 1)}{5} = \lg \left(\frac{1}{x^3} + 1 \right) \Rightarrow \frac{2(x^3 + 1)}{5} = \left(\frac{1}{x^3} + 1 \right)$. Legyen $y = x^3$. Ekkor $2y^2 - 3y - 5 = 0$, ahonnan $y = -1$ vagy $y = \frac{5}{2}$, de könnyen látható, hogy $y = -1$ nem lehet. A megoldás: $x = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$.

2.5.36 Megoldás A logaritmus definíciója alapján: $x^3 = x^3 + 3x^2 - 27 \Rightarrow x^2 = 9$, ahonnan $x = 3$ vagy $x = -3$, de ez utóbbi nem lehet, mivel a logaritmus alapja pozitív. A megoldás: $x = 3$.

2.5.37 Megoldás *Feltételek:* $x+1 > 0$ és $x+1 \neq 1$, azaz $x > -1$ és $x \neq 0$. A logaritmus definíciója alapján: $(x+1)^2 = 2x^2+1 \Rightarrow x^2+2x+1 = 2x^2+1 \Rightarrow x^2-2x = x(x-2) = 0$, ahonnan $x = 2$ vagy $x = 0$, de ez utóbbi nem lehet. A megoldás: $x = 2$.

2.5.38 Megoldás A logaritmus definíciója alapján:

$$\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0 \Rightarrow \log_3(\log_4 x) = 1 \Rightarrow \log_4 x = 3 \Rightarrow x = 4^3 = 64$$

2.5.39 Megoldás A logaritmus definíciója alapján:

$$\log_{\frac{1}{4}}(\log_{16}(\log_2 x)) = 1 \Rightarrow \log_{16}(\log_2 x) = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_2 x = 16^{\frac{1}{4}} = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4$$

2.5.40 Megoldás *Feltétel:* $x^2 - 2x = x(x-2) > 0$, ahonnan $x < 0$ vagy $x > 2$.

$$\log_3(x^2 - 2x) < 0 = \log_3 1 \Rightarrow x^2 - 2x < 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 < 0$$

Az $x^2 - 2x - 1 < 0$ egyenlőtlenségből: $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$. Így a feltétel figyelembevételével a feladat megoldása: $1 - \sqrt{2} < x < 0$ vagy $2 < x < 1 + \sqrt{2}$.

2.5.41 Megoldás *Feltétel:* $5 - 6x > 0$, ahonnan $x < \frac{5}{6}$.

$$\log_4(5 - 6x) \leq 2 = \log_4 16 \Rightarrow 5 - 6x \leq 16 \Rightarrow -\frac{11}{6} \leq x$$

A megoldás: $-\frac{11}{6} \leq x < \frac{5}{6}$.

2.5.42 Megoldás *Feltétel:* $3x - 4 > 0$, ahonnan $x > \frac{4}{3}$.

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) > \log_2 \frac{1}{8} = -3 = \log_{\frac{1}{2}} 8 \Rightarrow 3x - 4 < 8 \Rightarrow x < 4$$

A megoldás: $\frac{4}{3} < x < 4$.

2.5.43 Megoldás *Feltétel:* $x^2 + 3x - 1 > 0$, ahonnan $x < \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \approx -3,3$ vagy $x > \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \approx 0,3$.

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 3x - 1) < -1 &= \log_{\frac{1}{3}} 3 \Rightarrow \\ x^2 + 3x - 1 > 3 &\Rightarrow x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1) > 0 \end{aligned}$$

A megoldás: $x < -4$ vagy $x > 1$.

2.6. Trigonometrikus azonosságok és egyenletek

2.6.1 Megoldás

	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	210°	240°	270°	300°	315°
$\sin \varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos \varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\operatorname{tg} \varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	-1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1

2.6.2 Megoldás A következő összefüggések felhasználásával a hiányzó értékek kiszámíthatók: $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Rightarrow \cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$

$\sin \varphi$	$\frac{3}{4}$	$\pm \frac{\sqrt{119}}{12}$	$\frac{8}{17}$	$\pm \frac{35}{37}$	$\pm \frac{16}{65}$	$\pm \frac{21}{29}$
$\cos \varphi$	$\pm \frac{\sqrt{7}}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\pm \frac{15}{17}$	$\pm \frac{12}{37}$	$\frac{63}{65}$	$\pm \frac{20}{29}$
$\operatorname{tg} \varphi$	$\pm \frac{3}{\sqrt{7}}$	$\pm \frac{\sqrt{119}}{5}$	$\pm \frac{8}{15}$	$\frac{35}{12}$	$\pm \frac{16}{63}$	$\frac{21}{20}$

2.6.3 Megoldás

- $\sin 2\varphi = 1 \Rightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\sin 2\varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\varphi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ vagy $2\varphi = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ vagy $\varphi = \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\sin \frac{\varphi}{2} = -1 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \varphi = 3\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ vagy $\frac{\varphi}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$ vagy $\varphi = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos 2\varphi = 0 \Rightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

- $\cos 2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ vagy $2\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{12} + k\pi$ vagy $\varphi = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos \frac{\varphi}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = 2k\pi \Rightarrow \varphi = 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos \frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ vagy $\frac{\varphi}{2} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi$ vagy $\varphi = -\frac{4\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} 2\varphi = 0 \Rightarrow 2\varphi = k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} 2\varphi = -1 \Rightarrow 2\varphi = \frac{3\pi}{4} + k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\varphi}{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{ctg} 3\varphi = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} 3\varphi = 1 \Rightarrow 3\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{ctg} 3\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} 3\varphi = -\sqrt{3} \Rightarrow 3\varphi = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{3} = -\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\varphi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\varphi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \varphi = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2.6.4 Megoldás

- $\sin^2 \varphi = 1 \Rightarrow \sin \varphi = \pm 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg}^2 \varphi = 3 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} + k\pi$ vagy $\varphi = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- $\sin \varphi = \operatorname{ctg} \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \Rightarrow 1 - \cos^2 \varphi = \cos \varphi \Rightarrow \cos^2 \varphi + \cos \varphi - 1 = 0 \Rightarrow$
 $\cos \varphi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (a másik gyök nem megfelelő, mivel -1 -nél kisebb) $\Rightarrow$
 $\varphi = \pm \arccos \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\sin \varphi = -\operatorname{ctg} \varphi \Rightarrow \sin \varphi = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \Rightarrow 1 - \cos^2 \varphi = -\cos \varphi \Rightarrow \cos^2 \varphi - \cos \varphi - 1 = 0$
 $\Rightarrow \cos \varphi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (a másik gyök nem megfelelő, mivel 1 -nél nagyobb) $\Rightarrow$
 $\varphi = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos \varphi = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \Rightarrow 1 - \sin^2 \varphi = \sin \varphi \Rightarrow \sin^2 \varphi + \sin \varphi - 1 = 0 \Rightarrow$
 $\sin \varphi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (a másik gyök nem megfelelő, mivel -1 -nél kisebb) $\Rightarrow$
 $\varphi = \arcsin \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 2k\pi$ vagy $\varphi = \pi - \arcsin \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2.6.5 Megoldás

- $\sin^2 \varphi = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$
- $\cos^2 \varphi = \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$
- $\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi} - 1}}$
- $\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1 - \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1}$

2.6.6 Megoldás

- $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1, \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi \Rightarrow \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2},$
 $\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$

- $\sin \varphi = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{\frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\cos \varphi = \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

2.6.7 Megoldás

- $\cos \alpha = \frac{1}{2}, \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} \alpha = 1$ és α a harmadik síknegyedben van $\Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2.6.8 Megoldás

$$\sin \varphi (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi) + \cos \varphi (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi) = (\sin \varphi + \cos \varphi) \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right) =$$

$$(\sin \varphi + \cos \varphi) \cdot \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi + \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{1}{\sin \varphi}$$

2.6.9 Megoldás

$$(\sin \varphi - \cos \varphi)(1 + \sin \varphi \cos \varphi) + (\sin \varphi + \cos \varphi)(1 - \sin \varphi \cos \varphi) =$$

$$2 \sin \varphi + (\sin^2 \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos^2 \varphi) + (-\sin^2 \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos^2 \varphi) =$$

$$2 \sin \varphi - 2 \sin \varphi \cos^2 \varphi = 2 \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi) = 2 \sin^3 \varphi$$

2.6.10 Megoldás

$$\operatorname{tg} \frac{21\pi}{4} + \sqrt[5]{\sin(-7\pi)} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + 5\pi \right) + \sqrt[5]{0} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

2.6.11 Megoldás

$$\log_{\pi} \left[\left(\cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \right)^2 - \sin \frac{4\pi}{3} \right] =$$

$$\log_{\pi} \left(\cos^2 \frac{2\pi}{3} + \sin^2 \frac{2\pi}{3} + 2 \cos \frac{2\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3} \right) =$$

$$\log_{\pi} \left(1 + \sin \frac{4\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \log_{\pi} 1 = 0$$

2.6.12 Megoldás

$$8 \cos 2x + 7 \cos^2 x = 5 \sin x + \frac{27}{4} \Rightarrow 8(\cos^2 x - \sin^2 x) + 7 \cos^2 x = 5 \sin x + \frac{27}{4} \Rightarrow$$

$$8(1 - 2 \sin^2 x) + 7(1 - \sin^2 x) = 5 \sin x + \frac{27}{4} \Rightarrow 23 \sin^2 x + 5 \sin x - \frac{33}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\sin x = \frac{-5 \pm 28}{46}$$

Innen $\sin x = \frac{1}{2}$ vagy $\sin x = -\frac{33}{46}$, de ez utóbbi nem lehet, mivel $x \in [0, \pi]$.

A megoldás: $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$.

2.6.13 Megoldás A feladat megoldásához felhasználjuk, hogy minden p pozitív számra $p + \frac{1}{p} \geq 2$, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $p = 1$.

(Ugyanis, $p + \frac{1}{p} \geq 2 \Leftrightarrow p^2 - 2p + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (p - 1)^2 \geq 0$.) Mivel $x \in]0, \frac{\pi}{4}]$ esetén $\operatorname{tg} x > 0$ és $\operatorname{ctg} x > 0$, ezért

$$\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) + \left(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \right) \geq 4$$

és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\operatorname{tg} x = 1$, azaz $x = \frac{\pi}{4}$.

2.6.14 Megoldás

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} - \cos 2x = 0 \Rightarrow |\sin x| - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x + |\sin x| - 1 = 0$$

Ha $\sin x \geq 0$, azaz $0 \leq x \leq \pi$ vagy $x = 2\pi$, akkor az egyenlet: $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, ahonnan $\sin x = \frac{1}{2}$ vagy $\sin x = -1$, de ez utóbbi nem lehet. Innen a megoldás: $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Ha $\sin x < 0$, azaz $\pi < x < 2\pi$, akkor az egyenlet: $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$, ahonnan $\sin x = -\frac{1}{2}$ vagy $\sin x = 1$, de ez utóbbi nem lehet. Innen a megoldás: $x_3 = \frac{7\pi}{6}$, $x_4 = \frac{11\pi}{6}$.

2.6.15 Megoldás

$$\sin x + \cos^3 x = \cos x + \sin^3 x \Rightarrow \sin x(1 - \sin^2 x) = \cos x(1 - \cos^2 x) \Rightarrow$$

$$\sin x \cos^2 x = \cos x \sin^2 x \Rightarrow \sin x \cos x (\cos x - \sin x) = 0$$

Innen $\sin x = 0$ vagy $\cos x = 0$ vagy $\cos x = \sin x$. A megoldás: $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}$ vagy $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.6.16 Megoldás

$$\begin{aligned}3 \cos 2x &= -\sin x + 3 \Rightarrow 3(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\sin x + 3 \Rightarrow \\3(1 - 2 \sin^2 x) &= -\sin x + 3 \Rightarrow 6 \sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \\ \sin x(6 \sin x - 1) &= 0\end{aligned}$$

Innen $\sin x = 0$ vagy $\sin x = \frac{1}{6}$. *A megoldás:* $x = k\pi$ vagy $x = \arcsin \frac{1}{6} + 2k\pi$ vagy $x = \pi - \arcsin \frac{1}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.6.17 Megoldás

$$4 \cos^2 x + 8 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow 4(1 - \sin^2 x) + 8 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow 4 \sin^2 x - 8 \sin x - 5 = 0$$

Innen $\sin x = \frac{8-12}{8} = -\frac{1}{2}$ (a másik gyök nem megfelelő, mivel 1-nél nagyobb).
A megoldás: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ vagy $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.6.18 Megoldás Feltétel: $\cos x \neq 0$.

$$\begin{aligned}\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \sin x + \sin 2x &= \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \\ \cos^2 x + \sin^2 x + \sin x \cos x + \sin 2x \cos x &= 1 \Rightarrow 1 + \sin x \cos x + 2 \sin x \cos^2 x = 1 \Rightarrow \\ \sin x \cos x(1 + 2 \cos x) &= 0\end{aligned}$$

Innen $\sin x = 0$ vagy $\cos x = -\frac{1}{2}$. *A megoldás:* $x = k\pi$ vagy $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.6.19 Megoldás Feltétel: $x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\frac{\cos 2x}{\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x} &= \frac{1}{4} \sin^2 2x \Rightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{4} (2 \sin x \cos x)^2 \Rightarrow \\ \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^4 x - \sin^4 x} \cdot \sin^2 x \cos^2 x &= \sin^2 x \cos^2 x \Rightarrow \\ \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)} \cdot \sin^2 x \cos^2 x &= \sin^2 x \cos^2 x\end{aligned}$$

Az egyenlet azonosság: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$.

2.6.20 Megoldás

$$\begin{aligned}(1 - \cos 2x)^2 + (1 + \sin 2x)^2 &= 1 \Rightarrow \\(1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) + (1 + 2 \sin 2x + \sin^2 2x) &= 1 \Rightarrow \\2(1 - \cos 2x + \sin 2x) &= 0 \Rightarrow \\(\cos^2 x + \sin^2 x) - (\cos^2 x - \sin^2 x) + 2 \sin x \cos x &= 0 \Rightarrow \\2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x &= 0 \Rightarrow \\\sin x(\sin x + \cos x) &= 0\end{aligned}$$

A szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. A megoldás: $x = k\pi$ vagy $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.6.21 Megoldás

$$\begin{aligned}\sin 3x - \cos 2x \cdot \sin x &= \cos x \Rightarrow \\\sin(x + 2x) - \cos 2x \cdot \sin x &= \cos x \Rightarrow \\\sin x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \sin 2x - \cos 2x \cdot \sin x &= \cos x \Rightarrow \\\cos x \cdot \sin 2x - \cos x &= 0 \Rightarrow \\\cos x(\sin 2x - 1) &= 0\end{aligned}$$

A szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. A megoldás: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ vagy $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.6.22 Megoldás

$$\begin{aligned}2 \cos^3 x + \cos(\pi - x) &= 0 \Rightarrow \\2 \cos^3 x - \cos x &= 0 \Rightarrow \\\cos x(2 \cos^2 x - 1) &= 0 \Rightarrow \\\cos x \cdot \cos 2x &= 0\end{aligned}$$

A szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. A megoldás: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ vagy $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.6.23 Megoldás

$$\cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 15^\circ) = \frac{1}{4}$$

2.6.24 Megoldás

$$\sin 30^\circ \cdot \cos 15^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 15^\circ = \sin(30^\circ + 15^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2.6.25 Megoldás

$$\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ = \cos(10^\circ + 20^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2.6.26 Megoldás

$$\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2.6.27 Megoldás

$$\begin{aligned} \sin 70^\circ \cdot \sin 40^\circ + \frac{1}{2} \cos 110^\circ &= \sin 70^\circ \cdot \sin 40^\circ + \frac{1}{2}(\cos 70^\circ \cos 40^\circ - \sin 70^\circ \sin 40^\circ) = \\ \frac{1}{2}(\cos 70^\circ \cos 40^\circ + \sin 70^\circ \sin 40^\circ) &= \frac{1}{2} \cos(70^\circ - 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

2.6.28 Megoldás

$$\cos^2 22,5^\circ = \frac{1 + \cos(2 \cdot 22,5^\circ)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

2.7. Sorozatok; egyenletrendszerek

2.7.1 Megoldás $a_5 = a_1 + 4d = 17, a_7 = a_1 + 6d = 10 \Rightarrow d = -\frac{7}{2}, a_1 = 31$. Az első nyolc tag összege:

$$S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = \frac{2a_1 + 7d}{2} \cdot 8 = 150$$

2.7.2 Megoldás Legyenek a befogók $a - d$, a , az átfogó $a + d$. Ekkor $(a - d)a = 300$, $(a - d)^2 + a^2 = (a + d)^2$. Innen $a = 20, d = 5$, tehát az oldalak hossza 15 cm, 20 cm és 25 cm.

2.7.3 Megoldás $S_{n+4} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} = 69 - 38 = 31 \Rightarrow$
 $(a_1 + nd) + (a_1 + (n+1)d) + (a_1 + (n+2)d) + (a_1 + (n+3)d) = 31 \Rightarrow$
 $4a_1 + d(4n+6) = 31 \Rightarrow 2a_1 = 14 - n$.

$$S_n = \frac{2a_1 + 0,5(n-1)}{2}n = 38,$$

innen a) $n = 8, a_1 = 3$ vagy b) $n = 19, a_1 = -2,5$.

2.7.4 Megoldás Felhasználva, hogy $a_1 = a_2 - d$ és $a_3 = a_2 + d$, az $(a_2 - d) + a_2 + (a_2 + d) = -12$ egyenletet kapjuk, ahonnan $a_2 = -4$. A $(-4 - d) \cdot (-4) \cdot (-4 + d) = 80$ egyenletből $d = \pm 6$. A sorozat tagjai $d = 6$ esetén $a_1 = -10, a_2 = -4, a_3 = 2$, $d = -6$ esetén $a_1 = 2, a_2 = -4, a_3 = -10$.

2.7.5 Megoldás Felhasználva, hogy $a_1 = \frac{a_2}{q}$ és $a_3 = a_2 \cdot q$, az $\frac{a_2}{q} \cdot q \cdot a_2 \cdot q = 729$ egyenletet kapjuk, ahonnan $a_2 = 9$. A $\frac{9}{q} + 9 + 9q = 39$ egyenletből $q = 3$ vagy $q = \frac{1}{3}$. A sorozat tagjai $q = 3$ esetén $a_1 = 3, a_2 = 9, a_3 = 27$, $q = \frac{1}{3}$ esetén $a_1 = 27, a_2 = 9, a_3 = 3$.

2.7.6 Megoldás 1. $a_6 = a_2 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = 4 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2}$.
 $q = \sqrt{2}$ esetén $S_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{2})^{10} - 1}{\sqrt{2} - 1} = 3 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{93}{2 - \sqrt{2}} = \frac{93(2 + \sqrt{2})}{2}$
 $q = -\sqrt{2}$ esetén $S_{10} = \frac{93(2 - \sqrt{2})}{2}$
 2. $a_9 = a_3 \cdot q^6 \Rightarrow q^6 = 8 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2}$.
 $q = \sqrt{2}$ esetén $S_{12} = a_1 \cdot \frac{q^{12} - 1}{q - 1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(\sqrt{2})^{12} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{64 - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{189(\sqrt{2} + 1)}{2}$
 $q = -\sqrt{2}$ esetén $S_{12} = \frac{189(-\sqrt{2} + 1)}{2}$
 3. $a_4 - a_2 = a_2 + a_3 + a_4 \Rightarrow a_2(q^2 - 1) = a_2(1 + q + q^2) \Rightarrow q^2 - 1 = 1 + q + q^2 \Rightarrow q = -2$ (mivel $q \neq 0$).
 $a_2(q^2 - 1) = -6 \Rightarrow a_2 = -2 \Rightarrow a_1 = \frac{a_2}{q} = 1$.

2.7.7 Megoldás $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = (a_3 - 2d) + (a_3 - d) + a_3 + (a_3 + d) + (a_3 + 2d) = 5a_3 = 25 \Rightarrow a_3 = 5$. Mivel $b_1 = a_1, b_2 = a_2, b_3 = a_5$ mértani sorozat, ezért $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$, azaz $a_2^2 = a_1 \cdot a_5 \Rightarrow (a_3 - d)^2 = (a_3 - 2d)(a_3 + 2d) \Rightarrow (5 - d)^2 = 25 - 4d^2 \Rightarrow 5d^2 - 10d = 0 \Rightarrow d(d - 2) = 0 \Rightarrow d = 0$ vagy $d = 2$. $d = 0$ esetén $a_1 = 5, q = 1$; $d = 2$ esetén $a_1 = 1, q = 3$.

2.7.8 Megoldás $a_1 + a_2 + a_3 = (a_2 - d) + a_2 + (a_2 + d) = 21 \Rightarrow a_2 = 7$. Mivel $b_1 = a_1 + 6, b_2 = a_2 + 13, b_3 = a_3 + 30$ mértani sorozat, ezért $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$, azaz $(a_2 + 13)^2 = (a_1 + 6)(a_3 + 30) \Rightarrow (a_2 + 13)^2 = (a_2 - d + 6)(a_2 + d + 30) \Rightarrow 400 = (13 - d)(37 + d)$. Innen $d = -27$ vagy $d = 3$. A számtani sorozat $a_1 = 34, a_2 = 7, a_3 = -20$ vagy $a_1 = 4, a_2 = 7, a_3 = 10$.

2.7.9 Megoldás Legyenek a mértani sorozat tagjai a_1, a_2, a_3 . Az első feltételből

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1(1 + q + q^2) = 63.$$

Mivel $b_1 = a_1 + 3, b_2 = a_2, b_3 = a_3 - 30$ számtani sorozat, ezért $2b_2 = b_1 + b_3$, azaz $2a_2 = (a_1 + 3) + (a_3 - 30) \Rightarrow 2a_1q = a_1 + 3 + a_1q^2 - 30$, azaz

$$a_1(1 - 2q + q^2) = 27.$$

Az előző feltétellel együtt q -ra a $4q^2 - 17q + 4 = 0$ másodfokú egyenlet adódik. Innen $q = \frac{1}{4}$ és a sorozat $a_1 = 48, a_2 = 12, a_3 = 3$ vagy $q = 4$ és a sorozat $a_1 = 3, a_2 = 12, a_3 = 48$.

2.7.10 Megoldás A feltételekől $a_{12} = a_1 + 11d = 0 \Rightarrow a_1 = -11d$. $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 0 \Rightarrow a_1 + a_n = 0 \Rightarrow a_n = 11d$. $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 11d = -11d + (n-1)d \Rightarrow d(n-23) = 0 \Rightarrow n = 23$ (mivel $d \neq 0$).

$$S_{2n-1} = S_{45} = \frac{2a_1 + 44d}{2} \cdot 45 = \frac{2 \cdot (-11d) + 44d}{2} \cdot 45 = 495.$$

Innen $d = 1$ és $a_1 = -11$.

$$S_{69} = \frac{-11 + (-11 + 68)}{2} \cdot 69 = 1587.$$

2.7.11 Megoldás (a_n) számtani sorozat, ezért $a_2 = \sqrt{2} + d$ és $a_4 = \sqrt{2} + 3d$. Mivel a_1, a_2, a_4 mértani sorozat, ezért $a_2^2 = a_1 \cdot a_4$, azaz $(\sqrt{2} + d)^2 = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 3d)$. Innen $d = 0$ vagy $d = \sqrt{2}$. $d = 0$ esetén a sorozat minden tagja $\sqrt{2}$, így $q = 1$, tehát $S_{10} = 10a_1 = 10\sqrt{2}$. $d = \sqrt{2}$ esetén $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$, tehát $S_{10} = \sqrt{2} \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1023 \cdot \sqrt{2}$.

2.7.12 Megoldás Az $x^2 + xy = 210$ és $y^2 + xy = 231$ egyenleteket összeadva $(x + y)^2 = 441 \Rightarrow |x + y| = 21$. Ha $x + y = 21$, akkor a megoldás $x_1 = 10, y_1 = 11$. Ha $x + y = -21$, akkor a megoldás $x_2 = -10, y_2 = -11$.

2.7.13 Megoldás Az $xy + x + y = 29$ és $xy - 2x - 2y = 2$ egyenletekből $3(x + y) = 27$ és $3xy = 60 \Rightarrow x + y = 9$ és $xy = 20 \Rightarrow x(9 - x) = 20 \Rightarrow x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5) = 0$. A megoldás: $x_1 = 4, y_1 = 5; x_2 = 5, y_2 = 4$.

2.7.14 Megoldás A $(2x + y)^2 = 16$ egyenletből $|2x + y| = 4$, az $x - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ egyenletből $2x = 1 + \frac{2}{y}$. Ha $2x + y = 4$, akkor y -ra az $y^2 - 3y + 2 = (y - 1)(y - 2) = 0$ egyenlet adódik, ahonnan $y = 1$ vagy $y = 2$. Ha $2x + y = -4$, akkor y -ra az $y^2 + 5y + 2 = 0$ egyenlet adódik, ahonnan $y = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$. A megoldás: $x_1 = \frac{3}{2}, y_1 = 1; x_2 = 1, y_2 = 2; x_3 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}, y_3 = \frac{-5 - \sqrt{17}}{2}; x_4 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}, y_3 = \frac{-5 + \sqrt{17}}{2}$.

2.7.15 Megoldás Az $x^2 - 6xy + 9y^2 = 25$ egyenletből $|x - 3y| = 5$, az $x + \frac{1}{y} = 9$ egyenletből $x = 9 - \frac{1}{y}$. Ha $x - 3y = 5$, akkor y -ra a $3y^2 - 4y + 1 = 0$ egyenlet adódik, ahonnan $y = 1$ vagy $y = \frac{1}{3}$. Ha $x - 3y = -5$, akkor y -ra a $3y^2 - 14y + 1 = 0$ egyenlet adódik, ahonnan $y = \frac{7 \pm \sqrt{46}}{3}$. A megoldás: $x_1 = 8, y_1 = 1; x_2 = 6, y_2 = \frac{1}{3}; x_3 = 2 + \sqrt{46}, y_3 = \frac{7 + \sqrt{46}}{3}; x_4 = 2 - \sqrt{46}, y_4 = \frac{7 - \sqrt{46}}{3}$.

2.7.16 Megoldás Az $x + \frac{3}{4}y = 9$ és $\frac{x}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{1}{3}$ egyenletekből $12x + 9y = 108$ és $12x - 16y = 8$, ahonnan $25y = 100$, így a megoldás: $x = 6, y = 4$.

2.7.17 Megoldás Az $\frac{x+2}{3} - \frac{y-3}{4} = 3$ és $\frac{3}{x+2} - \frac{1}{y-3} = 0$ egyenletekből $y - 3 = \frac{x+2}{3}$, így x -re az $\frac{x+2}{3} - \frac{x+2}{12} = 3$ egyenlet adódik. A megoldás: $x = 10, y = 7$.

2.7.18 Megoldás Az $\frac{1}{x-2y} - \frac{2}{2x-y} = 3$ egyenlet kétszeresét a $-\frac{2}{x-2y} + \frac{5}{2x-y} = -5$ egyenlethez hozzáadva, $\frac{1}{2x-y} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x-2(2x-1)} - 2 = 3$. A megoldás: $x = \frac{3}{5}, y = \frac{1}{5}$.

2.7.19 Megoldás A $\frac{6}{x-5} + \frac{1}{y-2} = 2$ egyenlet 2-szereséből a $\frac{4}{x-5} + \frac{3}{y+2} = 3$ egyenlet 3-szorosát kivonva, y -ra a következő egyenlet adódik: $\frac{2}{y-2} - \frac{9}{y+2} = -5$, ahonnan $5y^2 - 7y + 2 = 0 \Rightarrow y = 1$ vagy $y = \frac{2}{5}$. A megoldás: $x_1 = 7, y_1 = 1; x_2 = \frac{51}{7}, y_2 = \frac{2}{5}$.

2.7.20 Megoldás Legyen $\sqrt{\frac{6x}{x+y}} := a \geq 0$. Ekkor a $\sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}$ egyenletből $2a^2 - 5a + 2 = 0$, ahonnan $a = 2$ vagy $a = \frac{1}{2}$. Ha $a = 2$, akkor a $\frac{6x}{x+y} = 4$ és $y - x = 44$ egyenletekből $x_1 = -88, y_1 = -44$. Ha $a = \frac{1}{2}$, akkor a $\frac{6x}{x+y} = \frac{1}{4}$ és $y - x = 44$ egyenletekből $x_2 = 2, y_2 = 46$.

2.7.21 Megoldás Legyen $3^x := a \geq 0$ és $4^y := b \geq 0$. Ekkor a $3^x + 4^y = 73$ és $3^x \cdot 4^y = 576$ egyenletekből $a^2 - 73a + 576 = 0$, ahonnan $a = 9$ vagy $a = 64$. Ha $a = 9$ és $b = 64$, akkor $x_1 = 2$, $y_1 = 3$. Ha $a = 64$ és $b = 9$, akkor $x_2 = \log_3 64$, $y_2 = \log_4 9$.

2.7.22 Megoldás A $2x - 4\sqrt{x} + y - 4 = 0$ és $5\sqrt{x} - y = 17$ egyenleteket összeadva $\sqrt{x}$ -re a $2x + \sqrt{x} - 21 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, melynek gyökei 3 és $-\frac{7}{2}$, de ez utóbbi nem lehet, mivel $\sqrt{x} \geq 0$. A megoldás: $x = 9$, $y = -2$.

2.7.23 Megoldás A $\frac{\sqrt{x}}{2} + y = 4$ és $y^2 - \sqrt{x} = 27$ egyenletekből $y^2 - (8 - 2y) = 27 \Rightarrow y^2 + 2y - 35 = (y + 7)(y - 5) = 0$, ahonnan $y = -7$ vagy $y = 5$, de ez utóbbi nem lehet, mivel $\sqrt{x} \geq 0$. A megoldás: $x = 484$, $y = -7$.

2.7.24 Megoldás A $3^{\log_3 x} - 2^{\log_4 y} = 77$ és $3^{\log_3 \sqrt{x}} - 2^{\log_{16} y} = 7$ egyenletekből $x - \sqrt{y} = 77$ és $\sqrt{x} - \sqrt[4]{y} = 7$. Mivel $x - \sqrt{y} = (\sqrt{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt[4]{y})$, ezért $\sqrt{x} + \sqrt[4]{y} = 11$. A $\sqrt{x} - \sqrt[4]{y} = 7$ és $\sqrt{x} + \sqrt[4]{y} = 11$ egyenletekből $2\sqrt{x} = 18$, így a megoldás: $x = 81$, $y = 16$.

2.7.25 Megoldás A $\log_2(xy) = 5$ és $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right) = 1$ egyenletekből $xy = 32$ és $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, így $x^2 = 16$, azaz $x = \pm 4$. A megoldás: $x_1 = 4$, $y_1 = 8$; $x_2 = -4$, $y_2 = -8$.

2.7.26 Megoldás A $8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1}$ és $5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}}$ egyenletekből $2^{6x+3} = 2^{4y+4}$ és $5^{x-y} = 5^{2y}$, ahonnan $6x + 3 = 4y + 4$ és $x - y = 2y$. Az egyenletrendszer megoldása: $x = \frac{3}{14}$, $y = \frac{1}{14}$.

2.7.27 Megoldás A $3^y \cdot 9^x = 81$ és $\lg(x+y)^2 - \lg x = 2 \lg 3$ egyenletekből $3^{2x+y} = 3^4$ és $\lg \frac{(x+y)^2}{x} = \lg 9$, ahonnan $2x + y = 4$ és $(x+y)^2 = 9x$. Így $x^2 - 17x + 16 = (x-16)(x-1) = 0$, ahonnan $x = 1$ vagy $x = 16$. A megoldás: $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 16$, $y_2 = -28$.

2.7.28 Megoldás Legyen $2^{x+y} := a \geq 0$ és $2^{x-y} := b \geq 0$. Így a $3 \cdot 2^{x+y} - 5 \cdot 2^{x-y} = 182$ és $5 \cdot 2^x \cdot 2^y - 4 \cdot 2^x \cdot 2^{-y} = 312$ egyenletekből $3a - 5b = 182$ és $5a - 4b = 312$, ahonnan $a = 64$ és $b = 2 \Rightarrow 2^{x+y} = 2^6$ és $2^{x-y} = 2 \Rightarrow x + y = 6$ és $x - y = 1$. Az egyenletrendszer megoldása: $x = \frac{7}{2}$, $y = \frac{5}{2}$.

2.8. Koordinátageometria

2.8.1 Megoldás $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (4, 4)$; $3(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (21, 12)$; $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = -10$;
 $(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = 11$; $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{26}$.

2.8.2 Megoldás 1. Legyen $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Innen $2\alpha - 10\beta = -6$, $5\alpha + 2\beta = 12$.
 Az egyenletrendszer megoldása: $\alpha = 2$, $\beta = 1$, tehát az $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos
 összetevő: $\alpha\mathbf{a} = (4, 10)$, a $\mathbf{b}$ vektorral párhuzamos összetevő: $\beta\mathbf{b} = (-10, 2)$.

2. A $\mathbf{c}$ vektorral párhuzamos például a $\mathbf{c}_1 = (-1, 2)$ vektor. A $\mathbf{c}$ -re merőleges például
 a $\mathbf{c}_2 = (2, 1)$ vektor. Legyen $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{c}_1 + \beta\mathbf{c}_2 \Rightarrow -\alpha + 2\beta = -10$, $2\alpha + \beta = 2$. Innen
 $\alpha = \frac{14}{5}$, $\beta = -\frac{18}{5}$, tehát az $\mathbf{c}$ -vel párhuzamos összetevő: $\mathbf{c}_p = \alpha\mathbf{c}_1 = \left(-\frac{14}{5}, \frac{28}{5}\right)$,
 a $\mathbf{c}$ -re merőleges összetevő: $\mathbf{c}_m = \beta\mathbf{b} = \left(-\frac{36}{5}, -\frac{18}{5}\right)$.

Másik megoldás:

$$\mathbf{c}_p = \left(\mathbf{b} \cdot \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}\right) \cdot \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \frac{60 + 24}{36 + 144} \cdot (-6, 12) = \frac{7}{15} \cdot (-6, 12) = \left(-\frac{14}{5}, \frac{28}{5}\right)$$

$$\mathbf{c}_m = \mathbf{b} - \mathbf{c}_p = \left(-\frac{36}{5}, -\frac{18}{5}\right)$$

3. Az $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (-8, 7)$ vektorra merőleges például a $(7, 8)$ vektor, melynek hossza $\sqrt{113}$.
 Az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ -re merőleges két egységvektor: $\left(\frac{7}{\sqrt{113}}, \frac{8}{\sqrt{113}}\right)$, $\left(-\frac{7}{\sqrt{113}}, -\frac{8}{\sqrt{113}}\right)$.

2.8.3 Megoldás A két vektor skaláris szorzata: $\mathbf{ab} = 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 2$. Legyen α az $\mathbf{a}$ és
 $\mathbf{b}$ által bezárt szög $\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{2}{\sqrt{25} \cdot 5} = \frac{2}{5 \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{2}{5 \cdot \sqrt{5}} \approx 79,7^\circ$.

2.8.4 Megoldás Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok pontosan akkor párhuzamosak, ha van olyan λ valós
 szám, melyre $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} \Rightarrow 6 = \lambda p$ és $-5 = 3\lambda$, ahonnan $p = -\frac{18}{5}$.

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok pontosan akkor merőlegesek, ha $\mathbf{ab} = 6p - 15 = 0$, azaz $p = \frac{5}{3}$.
 Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok pontosan akkor zárnak be hegyesszöget egymással, ha $\mathbf{ab} = 6p - 15 > 0$,
 azaz $p > \frac{5}{3}$.

2.8.5 Megoldás Legyenek a háromszög A , B , C csúcsnál lévő szögei α , β , γ . $\overrightarrow{AB} =$
 $(-7, 4)$ és $\overrightarrow{AC} = (-3, 3) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{21 + 12}{\sqrt{65}\sqrt{18}} = \frac{11}{\sqrt{130}}$, így $\alpha \approx 15,26^\circ$. Hasonlóan,
 $\beta \approx 15,71^\circ$, $\gamma \approx 149,04^\circ$. A második feladatnak három megoldása van: a paralelogramma
 negyedik csúcsát úgy kapjuk, hogy a háromszög csúcsait a szemközti oldal felezőpontjára

tükrözzük. Legyen $D_1(x_1, y_1)$ az A pont tükörképe a BC oldal $F_1\left(-3, \frac{7}{2}\right)$ felezőpontjára. Ekkor $\frac{2+x_1}{2} = -3$ és $\frac{0+y_1}{2} = \frac{7}{2}$, így a tükörkép: $D_1(-8, 7)$. Hasonlóképpen, a B pontot tükrözve az AC oldal $F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ felezőpontjára, a tükörkép: $D_2(6, -1)$. A C pontot tükrözve az AB oldal $F_3\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ felezőpontjára, a tükörkép: $D_3(-2, 1)$.

Másik megoldás:

$$D_1(x_1, y_1) = (-1, 3) + \overrightarrow{AB} = (-1, 3) + (-7, 4) = (-8, 7)$$

$$D_2(x_2, y_2) = (-1, 3) + \overrightarrow{BA} = (-1, 3) + (7, -4) = (6, -1)$$

$$D_3(x_3, y_3) = (2, 0) + \overrightarrow{CB} = (2, 0) + (-4, 1) = (-2, 1)$$

2.8.6 Megoldás 1. Az $A(2, 6)$ és $B(-3, 2)$ pontok távolsága a $\overrightarrow{BA} = (5, 4)$ vektor hossza: $d(A, B) = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$.

2. Az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontja: $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$.

Az A -hoz közelebbi harmadolópont: $H_1\left(\frac{2 \cdot 2 - 3}{3}, \frac{2 \cdot 6 + 2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

A B -hez közelebbi harmadolópont: $H_2\left(\frac{2 \cdot (-3) + 2}{3}, \frac{2 \cdot 2 + 6}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

3. Az $\overline{AB}$ szakasz f felezőmerőlegesének normálvektora: $\mathbf{n}_f = \overrightarrow{BA} = (5, 4)$. Az egyenes átmegy az F ponton, így f egyenlete: $5x + 4y = 5 \cdot (-0,5) + 4 \cdot 4$, azaz $5x + 4y = 13,5$.

4. Az A, B pontokon átmenő e egyenes normálvektora: $\mathbf{n}_e = (4, -5)$ így az egyenes egyenlete: $4x - 5y = 4 \cdot 2 - 5 \cdot 6$, azaz $4x - 5y = -22$. Az egyenes meredeksége: $m = \frac{4}{5}$.

5. Az $\overline{AB}$ átmérőjű kör középpontja F , sugara $r = \frac{\sqrt{41}}{2}$, így a kör egyenlete:

$$(x + 0,5)^2 + (y - 4)^2 = \frac{41}{4}$$

2.8.7 Megoldás A C középpontú 3 sugarú k_1 kör egyenlete: $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$. A D középpontú 3 sugarú k_2 kör egyenlete: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$. A keresett pontok a két

kör metszéspontjai. A k_1 kör egyenletéből kivonva a k_2 kör egyenletét, $4x + 8y - 8 = 0$ adódik (amely éppen a $\overline{CD}$ szakasz felezőmerőlegesének egyenlete). Innen x -et kifejezve és a k_1 kör egyenletébe beírva, $(3 - 2y)^2 + (y + 1)^2 = 9 \Rightarrow 5y^2 - 10y + 1 = 0$, ahonnan $y = 1 \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$. A keresett pontok: $P_1 \left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \right)$, $P_2 \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} \right)$.

2.8.8 Megoldás A keresett pontok az $\overline{AB}$ szakasz f felezőmerőlegesének az x , illetve az y tengellyel alkotott metszéspontjai. Az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontja: $F(4, 3)$. Az $\overrightarrow{AB} = (4, -8)$ vektorral párhuzamos például az $\mathbf{n}_f = (1, -2)$ vektor, amely normálvektora az f egyenesnek. Így f egyenlete: $x - 2y = -2$. Az f egyenes az x tengelyt a $P(-2, 0)$ pontban, az y tengelyt a $Q(0, 1)$ pontban metszi.

2.8.9 Megoldás A háromszög súlypontja: $S \left(\frac{3+1-7}{3}, \frac{-1+4-9}{3} \right) = (-1, -2)$, így a súlypont origótól vett távolsága $\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

2.8.10 Megoldás Az $5x - 4y = 14$, $2x - 3y = 3$ egyenletrendszer megoldása: $x = \frac{30}{7}$, $y = \frac{13}{7}$, így a g és h egyenesek metszéspontja: $M \left(\frac{30}{7}, \frac{13}{7} \right)$.

1. Az $M \left(\frac{30}{7}, \frac{13}{7} \right)$ és $P(5, 2)$ pontok távolsága az $\overrightarrow{MP} = \left(\frac{5}{7}, \frac{1}{7} \right)$ vektor hossza:
 $d(M, P) = \left| \overrightarrow{MP} \right| = \frac{\sqrt{26}}{7}$.

2. Az M és P pontokon átmenő egyenes normálvektora: $\mathbf{n} = (1, -5)$, így az egyenes egyenlete: $x - 5y = 5 - 5 \cdot 2$, azaz $x - 5y = -5$.

3. A P ponton átmenő, g -vel párhuzamos e egyenes normálvektora megegyezik g normálvektorával: $\mathbf{n}_e = \mathbf{n}_g = (5, -4)$, így e egyenlete: $5x - 4y = 5 \cdot 5 - 4 \cdot 2$, azaz $5x - 4y = 17$.

4. A P ponton átmenő, h -ra merőleges f egyenes normálvektora merőleges h normálvektorára: $\mathbf{n}_f \perp \mathbf{n}_h = (2, -3) \Rightarrow \mathbf{n}_f = (3, 2)$, így f egyenlete: $3x + 2y = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2$, azaz $3x + 2y = 19$.

5. A h és f egyenesek metszéspontja: $Q \left(\frac{63}{13}, \frac{29}{13} \right)$, így a P pont és h egyenes távolsága a $\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{2}{13}, \frac{3}{13} \right)$ vektor hossza: $d(P, h) = \left| \overrightarrow{PQ} \right| = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

Megjegyzés: A $P(x_0, y_0)$ pont és az $Ax + By + C = 0$ egyenletű e egyenes távolsága:
 $d(P, e) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Az előző példában: $d(P, h) = \frac{|2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

2.8.11 Megoldás A $P(2, 5)$ ponton átmenő, $e : -3x + y = 9$ egyenesre merőleges f egyenes normálvektora: $\mathbf{n}_f = (1, 3)$, így f egyenlete: $x + 3y = 17$. Az e és f egyenesek metszéspontja: $M(-1, 6)$. Legyen $Q(x, y)$ a P pontnak az e egyenesre vonatkozó tükörképe. Ekkor $\frac{2+x}{2} = -1, \frac{3+y}{2} = 6$, így a tükörkép: $Q(-4, 7)$.

2.8.12 Megoldás A $C(-1, 2)$ középpontú, $P(3, -2)$ ponton átmenő kör sugara a $\overrightarrow{CP} = (4, -4)$ vektor hossza: $r = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$. A kör egyenlete: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 32$.

2.8.13 Megoldás 1. Az $x^2 + y^2 + 4x + 10y + a = 0$ egyenletből $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 29 - a$, ami pontosan akkor köregyenlet, ha $a < 29$.

2. A $4x^2 + Ay^2 - 32x + 24y + Bxy + C = 0$ egyenletben $A = 4, B = 0$, ahonnan $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 16 + 9 - \frac{C}{4} > 0 \Rightarrow C < 100$.

2.8.14 Megoldás

A $P(8, -1)$ ponton átmenő, tengelyeket érintő kör középpontja $C(r, -r)$, ahol r a kör sugara. Innen $(8 - r)^2 + (-1 + r)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - 18r + 65 = (r - 5)(r - 13) = 0$, ahonnan a körök sugara $r_1 = 5, r_2 = 13$. A körök egyenlete: $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$ és $(x - 13)^2 + (y + 13)^2 = 169$.

2.8.15 Megoldás A kör az első síknegyedben van, így középpontja $C(r, r)$, ahol r a kör sugara. A $3x + 4y = 12$ egyenletű egyenes a tengelyeket az $A(4, 0)$ és $B(0, 3)$ pontokban metszi. A feladatnak két megoldása van. Felhasználva a külső pontból húzott érintők egyenlőségét, az A -ból és B -ből a körhöz húzott érintők hosszának összege az AB szakasz hosszával egyenlő, azaz $(4 - r) + (3 - r) = 5$, ahonnan $r = 1$, így ekkor a kör egyenlete: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. A másik megoldás hasonlóan: $(r - 4) + (r - 3) = 5$, ahonnan $r = 6$, így ekkor a kör egyenlete: $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 36$.

2.8.16 Megoldás A kör egyenlete: $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 35$, így a kör középpontja: $C(-4, 3)$. Az C -n átmenő, $e : 2x - 5y = 7$ egyenesre merőleges f egyenes normálvektora: $\mathbf{n}_f = (5, 2)$, így f egyenlete: $5x + 2y = -14$.

2.8.17 Megoldás A kör egyenlete: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$, így a kör középpontja $C(2, 3)$. Az $(5 - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ egyenletből $y_1 = 7, y_2 = -1$, így az érintési pontok $P(5, 7)$ és $Q(5, -1)$. A P -beli érintő normálvektora: $\overrightarrow{CP} = (3, 4)$, így a P -beli érintő egyenlete: $3x + 4y = 43$. A Q -beli érintő normálvektora: $\overrightarrow{CQ} = (3, -4)$, így a Q -beli érintő egyenlete: $3x - 4y = 19$.

2.8.18 Megoldás A kör egyenlete: $(x-9)^2 + (y+3)^2 = 256$, így középpontja $C(9, -3)$. A $\overline{CP}$ szakasz felezőpontja $F(17, -9)$. Az F középpontú, $r = |\overrightarrow{CF}| = 10$ sugarú Thalész-kör egyenlete: $(x-17)^2 + (y+9)^2 = 100$. Az érintési pontok e két kör metszéspontjai: $P(25, -3)$ és $Q\left(\frac{337}{25}, -\frac{459}{25}\right)$. A P -beli érintő normálvektora $\overrightarrow{CP} = (16, 0)$, így a P -beli érintő párhuzamos az y tengellyel, egyenlete: $x = 25$. A Q -beli érintő normálvektora $\overrightarrow{CQ} = \left(\frac{112}{25}, -\frac{384}{25}\right)$, amellyel párhuzamos például a $(7, -24)$ vektor. Így a Q -beli érintő egyenlete: $7x - 24y = 535$.

2.8.19 Megoldás A feladat kétféleképpen oldható meg. Vagy kiszámítjuk a három pont által meghatározott háromszög köré írható kör középpontját az oldalfelező merőlegesek metszéspontjaként; vagy a kör egyenletébe behelyettesítjük külön-külön a három adott pont koordinátáit, és a három egyenletből a kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát kiszámíthatjuk. A megoldás: $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 169$.

2.8.20 Megoldás A kör egyenlete: $(x+3)^2 + (y-8)^2 = 49$. A $P(1, 4)$ ponton átmenő húrrok közül az a legrövidebb, amelynek a felezőpontja P . A húr egyenesének normálvektora: $\mathbf{n} = \overrightarrow{CP} = (4, -4)$, amellyel párhuzamos az $(1, -1)$ vektor. A húr egyenesének egyenlete: $x - y = -3$, ahonnan $x = y - 3$. Ezt a kör egyenletébe beírva a $2y^2 - 16y + 15 = 0$ egyenlet adódik. Innen a húr végpontjai: $A\left(1 - \frac{\sqrt{34}}{2}, 4 - \frac{\sqrt{34}}{2}\right)$, $B\left(1 + \frac{\sqrt{34}}{2}, 4 + \frac{\sqrt{34}}{2}\right)$. A húr hossza az $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{34}, \sqrt{34})$ vektor hossza: $2\sqrt{17}$.

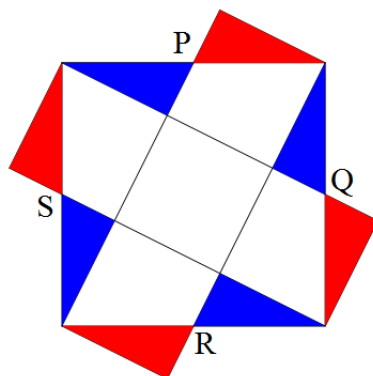
2.8.21 Megoldás A $P(-7, -2)$ ponton átmenő, $e: 3x + 2y = 13$ egyenessel párhuzamos egyenes: $g: 3x + 2y = -25$. A P -n átmenő, $f: 5x - 3y = -10$ egyenessel párhuzamos egyenes: $h: 5x - 3y = -29$. A paralelogramma többi csúcsát az e, f, g, h egyenesek metszéspontjaiként kapjuk. Az e és f egyenesek metszéspontja: $A(1, 5)$; e és h metszéspontja: $B(-1, 8)$; f és g metszéspontja: $C(-5, -5)$.

2.8.22 Megoldás Az A ponton átmenő magasságvonal normálvektora: $\overrightarrow{BC} = (-6, 5)$, így az egyenes egyenlete: $-6x + 5y = 14$. A B ponton átmenő magasságvonal normálvektora: $\overrightarrow{CA} = (2, 1)$, így az egyenes egyenlete: $2x + y = 8$. A C ponton átmenő magasságvonal normálvektora: $\overrightarrow{AB} = (4, -6)$, amellyel párhuzamos a $(2, -3)$ vektor, így az egyenes egyenlete: $2x - 3y = -11$.

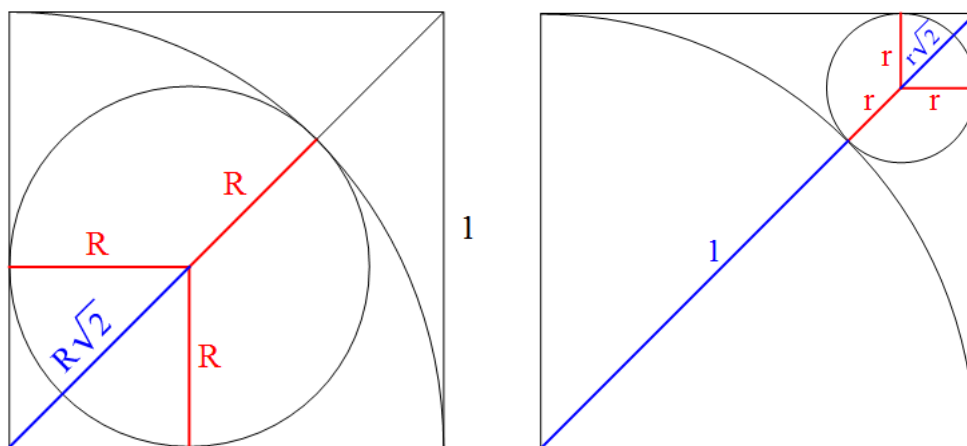
2.8.23 Megoldás A BC oldal felezőpontja: $F(4, 2)$, továbbá $\overrightarrow{FA} = (1, 1)$. Az A csúcson átmenő f súlyvonal normálvektora: $\mathbf{n}_f = (1, -1)$, így f egyenlete: $x - y = 2$. Az origón átmenő, f -re merőleges e egyenes normálvektora: $\mathbf{n}_e = (1, 1)$, így e egyenlete: $x + y = 0$. Az e és f egyenesek metszéspontja: $M(1, -1)$. Így a súlyvonal origótól való távolsága: $\sqrt{2}$.

2.9. Síkidomok kerülete, területe; testek

2.9.1 Megoldás A kék háromszögeket a P , Q , R , S pontokra tükrözve a piros háromszögeket kapjuk, így öt egybevágó kis négyzet keletkezik, melyek területösszege 1. Így a középső négyzet területe $\frac{1}{5}$.



2.9.2 Megoldás Legyen a körlemez sugara R . Ekkor $R\sqrt{2} + R = 1$, ahonnan $R = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$.



2.9.3 Megoldás Legyen a körlemez sugara r . Ekkor $1 + r + r\sqrt{2} = \sqrt{2}$, ahonnan $r = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

2.9.4 Megoldás Legyen az egyenlő szárú háromszög alapja a és szára b . A háromszög területe: $T = \frac{1}{2}b^2 \sin 30^\circ = \frac{b^2}{4} = 1$, így a háromszög szára: $b = 2$. A koszinusztételből $a^2 = b^2 + b^2 - 2b^2 \cos 30^\circ = 8 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4(2 - \sqrt{3})$, ahonnan a háromszög alapja: $a = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

2.9.5 Megoldás A háromszög magassága: $m = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$, területe: $T = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

2.9.6 Megoldás A háromszög oldala: $a = \frac{2m}{\sqrt{3}}$, területe: $T = \frac{m^2}{\sqrt{3}}$.

2.9.7 Megoldás A szabályos hatszög szemközti csúcsait összekötve hat egybevágó szabályos háromszöget kapunk, melyek magassága $m = 3$. A hatszög oldala: $a = \frac{2m}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

A hatszög területe: $T = 6 \cdot \frac{m^2}{\sqrt{3}} = 18\sqrt{3}$.

2.9.8 Megoldás Legyen a szabályos háromszög magassága m , köréírt körének sugara R , beírt körének sugara r . A köréírt és a beírt kör középpontja a magasságvonal oldalhoz közelebbi harmadolópontja, így $R = \frac{2}{3}m$ és $r = \frac{1}{3}m$, ahonnan $R = 2r$, azaz a beírt kör sugara 1 egység, a háromszög magassága: $m = 3$ egység. A háromszög oldala: $a = \frac{2m}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$, területe: $T = \frac{m^2}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$.

2.9.9 Megoldás Egy szabályos háromszög oldalfelező pontjait összekötve négy egybevágó szabályos háromszöget kapunk, ahol a középső háromszög köréírt köre és az eredeti háromszög beírt köre megegyezik. Így egy körbe írt és a kör köré írt szabályos háromszögek területének aránya $1 : 4$.

Másik megoldás: Legyen a kör sugara r , a beírt háromszög magassága m és a köréírt háromszög magassága M . Ekkor $r = \frac{M}{3}$ és $r = \frac{2}{3}m$. A beírt és köréírt háromszögek magasságának aránya $\frac{m}{M} = \frac{1}{2}$, így területük aránya: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

2.9.10 Megoldás Egy háromszög oldalfelező pontjait összekötve négy egybevágó háromszöget kapunk. Így egy háromszöget egy középvonala $1 : 3$ területarányú részekre bont.

2.9.11 Megoldás Legyen R a három, r sugarú kört magában foglaló kör sugara. Az r sugarú körök középpontjait összekötve egy $2r$ oldalú szabályos háromszöget kapunk, melynek magassága $m = r \cdot \sqrt{3}$, így $R = \frac{2}{3}m + r = r \cdot \frac{2\sqrt{3} + 3}{3}$.

2.9.12 Megoldás Legyen a derékszögű háromszög két befogója a és b . A háromszög területe: $T = \frac{ab}{2} = 180$, továbbá a Pitagorasz-tételből $a^2 + b^2 = 41^2$. Így $a^4 - 41^2 a^2 + 360^2 = 0$, ahonnan $a = 9$, $b = 40$ vagy $a = 40$, $b = 9$. A háromszög befogói 9 cm és 40 cm hosszúak.

2.9.13 Megoldás Legyen $x = AP = PC$, ekkor $BP = 9 - x$. A Pitagorasz-tételből $x^2 = (9 - x)^2 + 3^2$, ahonnan $x = 5$, tehát a P pont az A -tól 5 cm távolságra van.

2.9.14 Megoldás A téglalap oldalai legyenek $a = 2$ és b , a és b oldallal szemközti szög α . A feltételből a téglalap átlójának hossza $2b$. Így $\sin \alpha = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$, ahonnan $\alpha = 30^\circ$.

2.9.15 Megoldás A téglalap oldalai legyenek a és b . Ekkor a feltételekből $a + b = 34$ és $a^2 + b^2 = 26^2$. A téglalap területe:

$$T = ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} = \frac{34^2 - 26^2}{2} = \frac{(34-26)(34+26)}{2} = \frac{8 \cdot 60}{2} = 240$$

2.9.16 Megoldás A rombusz oldala legyen a , átlói e és f . Ekkor a rombusz területe: $1 = a^2 \sin 30^\circ$, ahonnan $a = \sqrt{2}$. Felhasználva, hogy a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, a rombusz területe az átlókkal kifejezve: $1 = \frac{ef}{2}$, továbbá a Pitagorasz-tételből $\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = a^2 = 2$. Így $e^4 - 8e^2 + 4 = 0$, ahonnan $e = \sqrt{4 \pm 2\sqrt{3}} = \sqrt{(1 \pm \sqrt{3})^2} = \sqrt{3} \pm 1$. A rombusz oldalának hossza $\sqrt{2}$, átlóinak hossza $\sqrt{3} + 1$ és $\sqrt{3} - 1$.

2.9.17 Megoldás A szimmetrikus trapéz alapjai legyenek a és c . Ekkor $a + c = 2 \cdot 45 = 90$ és $41^2 = 9^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \Rightarrow (a-45)^2 = 41^2 - 9^2 = (41-9)(41+9) = 32 \cdot 50 = 64 \cdot 25 \Rightarrow a - 45 = \pm 40 \Rightarrow a = 85$ vagy $a = 5$. A trapéz alapjai 85 mm és 5 mm hosszúak.

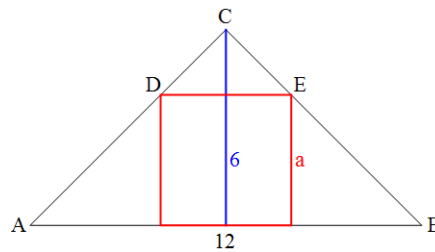
2.9.18 Megoldás A felszínek arányából a két tetraéder éleinek aránya $1 : \sqrt{2}$, ezért térfogatuk aránya $1 : (\sqrt{2})^3 = 1 : 2\sqrt{2}$.

2.9.19 Megoldás Mivel a folyadékkúp térfogatának és a pohár térfogatának aránya $1 : 2$, ezért a két kúp magasságának aránya $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,8$.

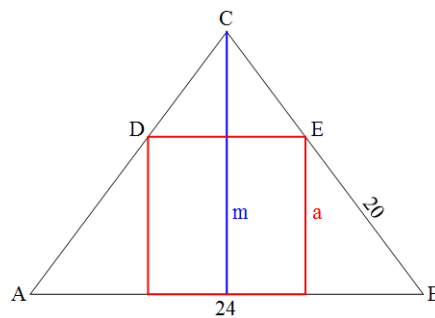
2.9.20 Megoldás Az a élű kocka lapátlójának hossza $a\sqrt{2}$, testátlójának hossza $a\sqrt{3}$. Így $a\sqrt{2} = \sqrt{6}$, ahonnan a kocka élének hossza $a = \sqrt{3}$, tehát a kocka testátójának hossza 3.

2.9.21 Megoldás Az a élű kockának valamely lapátlójára merőleges síkmetszete olyan téglalap, melynek oldalai a és $a\sqrt{2}$, a téglalap átlója pedig a kocka testátlója, azaz $a\sqrt{3}$. Legyen a keresett távolság x , ez a téglalap csúcsának az átlótól való távolsága. Ekkor a téglalap területét kétféleképpen felírva, $a \cdot a \cdot \sqrt{2} = x \cdot a \cdot \sqrt{3}$, ahonnan $x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

2.9.22 Megoldás Tekintsük a gúlának azt a síkmetszetét, amely tartalmazza a gúla magasságvonalát és két szemközti alapél oldalfelező pontját. Legyen a kocka éle a . Az ábra alapján az ABC és DEC háromszögek hasonlósága miatt $\frac{a}{6-a} = \frac{12}{6}$, ahonnan $a = 4$, tehát a kocka éle 4 cm.

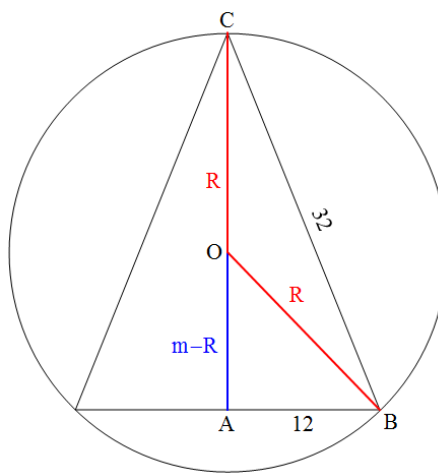


2.9.23 Megoldás A forgáskúp és a henger közös tengelyére illeszkedő síkmetszet esetén az ábra alapján a kúp magassága: $m = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$. Az ABC és DEC háromszögek hasonlósága miatt $\frac{a}{16-a} = \frac{24}{16}$, ahonnan a henger magassága: $a = \frac{48}{5} = 9,6$, így a henger sugara: $r = 4,8$. A henger térfogata: $V = r^2\pi a = 4,8^2 \cdot \pi \cdot 9,6 \approx 694,9 \text{ cm}^3$.

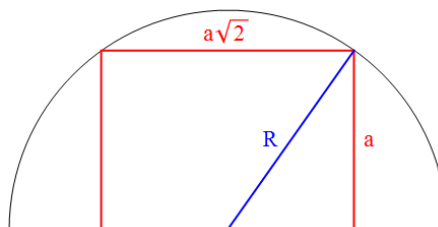


2.9.24 Megoldás Legyen a kúp magassága m , a gömb sugara R . A kúp tengelyére illeszkedő síkmetszet esetén az ábra alapján a kúp magassága a CAB derékszögű háromszögben: $m = AC = \sqrt{32^2 - 12^2} = 4\sqrt{55}$. Az OAB derékszögű háromszögben $(m - R)^2 + 12^2 = R^2$, ahonnan $R = \frac{128}{\sqrt{55}}$. Így a gömb térfogata:

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{4}{3}\left(\frac{128}{\sqrt{55}}\right)^3\pi \approx 21536 \text{ cm}^3$$



2.9.25 Megoldás Legyen a félgömb sugara R . A kocka alapnégyzetének átlójára illeszkedő, az alapsíkra merőleges síkmetszet esetén az ábra alapján $R^2 = a^2 + \left(\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}a^2$, ahonnan a gömb sugara: $R = a \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$.



2.9.26 Megoldás Legyen az a élű szabályos tetraéder kitérő éleinek távolsága y . Metsszük el a tetraédert egy olyan síkkal, amely illeszkedik az egyik élre és a szemközti él felezőpontjára. A síkmetszet egy olyan egyenlő szárú háromszög, melynek alapja a , szára $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ és az alaphoz tartozó magassága y . Ekkor $y^2 = m^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$, ahonnan $y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Másik megoldás: Az a élű tetraéder befoglalható egy olyan kockába, melynek lapátlói a tetraéder élei. Ekkor a tetraéder kitérő éleinek távolsága éppen a kocka élének hossza, azaz $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

2.9.27 Megoldás Legyen a tetraéder testmagassága x . Az előző feladathoz hasonlóan, metsszük el a tetraédert egy olyan síkkal, amely illeszkedik az egyik élre és a szemközti él felezőpontjára. A síkmetszet egy olyan egyenlő szárú háromszög, melynek alapja a , az alaphoz tartozó magassága $y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, szára $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ és a szárhoz tartozó magassága x . Ekkor $a \cdot y = m \cdot x \Rightarrow a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot x$, ahonnan $x = a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = a \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}$. A tetraéder alaplappjának területe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, így a tetraéder térfogata: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

2.9.28 Megoldás A négy gömb középpontját összekötve egy $2R$ élű szabályos tetraédert kapunk, melynek testmagassága az előző feladat alapján $2R \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$. Így a négy gömbből álló test magassága: $2R \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

3. fejezet

Nehezebb feladatok

3.1. Feladatok

3.1. Feladat *Igazoljuk, hogy az*

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} + \dots$$

sor konvergens!

3.2. Feladat *Határozza meg annak a körnek az egyenletét, amely az*

$$(x-2)^2 + (y-9)^2 = 4,$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

és

$$(x-9)^2 + (y-8)^2 = 4$$

egyenletekkel megadott köröket kívülről érinti!

3.3. Feladat *Mutassuk meg, hogy*

$$(x-a)^2(b-c) + (x-b)^2(c-a) + (x-c)^2(a-b)$$

az x -től független három elsőfokú tényező szorzatára bontható!

3.4. Feladat *Konvergens-e vagy sem a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^2+n}$$

sor? Ha konvergens, mennyi az összege?

3.5. Feladat Melyik az a négyjegyű négyzetszám, amelyben az első két számjegy megegyezik, és az utolsó két számjegy is megegyezik?

3.6. Feladat Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x + y + z &= a \\x^2 + y^2 + z^2 &= b \\x^3 + y^3 + z^3 &= c.\end{aligned}$$

Speciális eset: $a = -1$, $b = 5$, $c = -7$.

3.7. Feladat Egyenlő területű derékszögű háromszögek közül melyiknek legnagyobb a területe?

3.8. Feladat Bizonyítsuk be, hogy

$$n! \leq 2 \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

3.9. Feladat Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenletet:

$$4 \cdot \operatorname{tg} 3x + 4 \cdot \operatorname{tg} 2x + 5 \cdot \operatorname{tg} x = 0.$$

3.10. Feladat Számítsuk ki az

$$a_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

sorozat határértékét!

3.11. Feladat Konvergens-e, és ha igen, mi a határértéke annak a sorozatnak, amelynek általános tagja

$$a_n = \frac{n^n}{5^n \cdot n!}?$$

3.12. Feladat Hány valós gyöke van az

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} = 0$$

egyenletnek?

3.13. Feladat Melyiknek a legnagyobb a területe az adott körszeletbe rajzolható olyan téglalapok közül, amelyeknek egyik oldala a körszelet húrján nyugszik?

3.14. Feladat Számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\cos^2 n + \frac{(2n+1)\sin^2 n}{2n}}.$$

3.15. Feladat Bizonyítsuk be, hogy ha az

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

egyenlet mindhárom gyöke pozitív, akkor a gyökök reciprok értékeinek összege (q -tól függetlenül) kisebb, mint

$$-\frac{p^2}{2r}.$$

3.16. Feladat Számítsuk ki az alábbi sorozat határértékét, ha $x > 0$:

$$a_n = \left(\frac{1 + \sqrt[n]{x}}{2} \right)^n.$$

3.2. Megoldások

3.2.1 Megoldás Alakítsuk át az általános tagot:

$$\frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{1}{2} \frac{(4n+3) - (4n+1)}{(4n+3)(4n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right)$$

A sor így írható:

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \dots \right).$$

Ez olyan váltakozó előjelű sor, amelynek általános tagja zérushoz tart és tagjai abszolút értékben szigorúan monoton csökkennek, a sor tehát Leibniz kritériuma értelmében konvergens.

3.2.2 Megoldás Legyen a keresett kör középpontja $M(\alpha; \beta)$, sugara r . Mivel a megadott körök mindegyike 2 sugarú, ezért M mindhárom kör középpontjától $r+2$ távolságra van:

$$\begin{aligned}(\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2 &= (r + 2)^2 \\(\alpha - 2)^2 + (\beta - 9)^2 &= (r + 2)^2 \\(\alpha - 9)^2 + (\beta - 8)^2 &= (r + 2)^2.\end{aligned}$$

Két egyenletből kivonva ugyanazt a harmadikat

$$\begin{aligned}(\alpha - 1)^2 - (\alpha - 2)^2 + (\beta - 2)^2 - (\beta - 9)^2 &= 0 \\(\alpha - 9)^2 - (\alpha - 2)^2 + (\beta - 8)^2 - (\beta - 9)^2 &= 0\end{aligned}$$

adódik, amiből átalakítások után

$$\begin{aligned}\alpha + 7\beta &= 40 \\-7\alpha + \beta &= -30.\end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek a gyökei $\alpha = \beta = 5$. Ennek ismeretében $r = 3$ -hoz már könnyen eljuthatunk. A keresett kör egyenlete tehát

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 9.$$

3.2.3 Megoldás Végezzük el a négyzetre emelést:

$$(x^2 - 2ax + a^2)(b - c) + (x^2 - 2bx + b^2)(c - a) + (x^2 - 2cx + c^2)(a - b),$$

aztán a szorzást és összevonást. Kapjuk:

$$a^2b - a^2c + b^2c - ab^2 + ac^2 - bc^2.$$

Erről pedig a szorzások elvégzésével könnyen megállapíthatjuk, hogy egyenlő a

$$(b - a)(c - b)(a - c)$$

szorzattal.

3.2.4 Megoldás *Bontsuk az általános tag abszolút értékét rész törték összegére:*

$$\frac{2n+1}{n^2+n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{(A+B)n+A}{n^2+n}.$$

Ez csak úgy lehet, ha

$$A+B=2 \quad \text{és} \quad A=1,$$

amiből $B=1$ következik. Az n -edik részletösszeg tehát:

$$\begin{aligned} S_n &= -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{n+1} = \\ &= -1 + (-1)^n \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

ezért a sor konvergens és összege:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -1 + \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = -1.$$

3.2.5 Megoldás *Legyen a keresett szám N^2 . A feltételek szerint*

$$N^2 = \overline{aabb} = 11(10^2a + b).$$

Az N^2 tehát osztható 11-gyel, így 11^2 -nel is, és az

$$N^2 = 11(99a + a + b)$$

előállítás azt eredményezi, hogy

$$a + b = 11,$$

hiszen a és b egyjegyű és $a \neq 0$. Ez utóbbi felhasználásával kapjuk:

$$N^2 = 11^2(9a + 1),$$

tehát $9a + 1$ -nek is négyzetszámnak kell lennie. Ez pedig csak akkor következhet be, ha $a = 7$, de akkor $b = 4$. Így a feltételeket kielégítő négyjegyű szám:

$$7744 = 88^2.$$

3.2.6 Megoldás *Érvényes az alábbi két azonosság:*

$$(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + yz + zx)$$

$$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz.$$

Egyenleteink figyelembevételével az első azonosságból

$$xy + yz + zx = \frac{a^2 - b}{2},$$

a másodikból

$$xyz = \frac{3a \frac{a^2 - b}{2} - a^3 + c}{3} = \frac{a^3 - ab}{2} + \frac{c - a^3}{3} = \frac{a^3 - 3ab + 2c}{6}$$

adódik. A gyökök és együtthatók összefüggéseinek felhasználásával a

$$W^3 - aW^2 + \frac{a^2 - b}{2}W - \frac{a^3 - 3ab + 2c}{6} = 0$$

harmadfokú egyenletet kapjuk, s ennek gyökei adják az (x, y, z) megoldáshármaszt.

Ha $a = -1$, $b = 5$, $c = -7$, akkor

$$W^3 + W^2 - 2W = W(W^2 + W - 2) = 0,$$

tehát $x = W_1 = 0$, $y = W_2 = 2$, $z = W_3 = -1$. Mivel mindhárom egyenletünk x -ben, y -ban és z -ben szimmetrikus, a további megoldások még:

$$(0; -1; 2); (2; 0; -1); (2; -1; 0); (-1; 0; 2); (-1; 2; 0).$$

Ha $b = a^2$ és $c = a^3$, akkor a megoldások:

$$(0; 0; a); (0; a; 0); (a; 0; 0).$$

3.2.7 Megoldás Ha a derékszögű háromszög befogói x és y , átfogója pedig z , akkor egyrészt

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

másrészt

$$x + y + z = 2s$$

teljesül, ahol $2s$ a háromszög kerülete.

Ezekből

$$2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = (2s - z)^2 - z^2 = 4s^2 - 4sz$$

adódik. A háromszög T területe:

$$T = \frac{xy}{2} = s^2 - sz = s(s - z)$$

az átfogó függvénye. Így, ha z értéke csökken, akkor a terület nő.
De a derékszögű háromszögben

$$x + y > z \geq \frac{x + y}{\sqrt{2}}$$

teljesül, ezért a z legkisebb értéke $\frac{x + y}{\sqrt{2}}$ lehet. Ebben az esetben viszont a háromszög egyenlő szárú, ugyanis a négyzetes és számtani közép között fennáll a

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} = \frac{z}{\sqrt{2}} \geq \frac{x + y}{2}$$

egyenlőtlenség, és az egyenlőség akkor érvényes, ha $x = y$. Az adott területű derékszögű háromszögek közül tehát az egyenlő szárúak a maximális területűek, és mivel $x = y$, ezért

$$2x + \frac{2x}{\sqrt{2}} = 2s,$$

azaz

$$x = s(2 - \sqrt{2}) = y.$$

Így a maximális terület:

$$T_{\max} = \frac{x^2}{2} = s^2(3 - 2\sqrt{2}).$$

3.2.8 Megoldás A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

Könnyen ellenőrizhető, hogy $n = 1$ -re és $n = 2$ -re az egyenlőség teljesül. Tegyük fel, hogy valamely természetes k -ra állításunk igaz, s következtessünk $k + 1$ -re. Indukciós feltevésünk értelmében

$$\begin{aligned} (k + 1)! &= k!(k + 1) \leq 2 \left(\frac{k}{2}\right)^k (k + 1) \leq 2 \left(\frac{k + 1}{2}\right)^k \cdot \frac{k + 1}{2} = \\ &= 2 \left(\frac{k + 1}{2}\right)^{k+1}, \end{aligned}$$

hacsak

$$\left(\frac{k}{2}\right)^k (k + 1) \leq \left(\frac{k + 1}{2}\right)^k \cdot \frac{k + 1}{2},$$

azaz ha

$$2k^k \leq (k + 1)^k.$$

Márpedig a binomiális tétel szerint ez minden $k \geq 1$ -re teljesül, ugyanis

$$(k + 1)^k = k^k + \binom{k}{1} k^{k-1} + \dots + 1 \geq 2k^k,$$

mert nemnegatív tagokat hagytunk el. Ezzel állításunkat igazoltunk.

3.2.9 Megoldás *Mivel*

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

és

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 3x &= \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x}{1 - \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \operatorname{tg} x} = \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x},\end{aligned}$$

ezért

$$4 \cdot \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} + 4 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 5 \operatorname{tg} x = 0,$$

amiből vagy

$$\operatorname{tg} x = 0,$$

vagy

$$\frac{12 - 4 \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} + \frac{8}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 5 = 0.$$

Ebből

$$12 - 4 \operatorname{tg}^2 x - 12 \operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg}^4 x + 8 - 24 \operatorname{tg}^2 x + 5 - 15 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg}^2 x + 15 \operatorname{tg}^4 x = 0,$$

azaz

$$19 \operatorname{tg}^4 x - 60 \operatorname{tg}^2 x + 25 = 0.$$

Az első esetben

$$x_1 = \operatorname{arctg} 0 = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

a másodikban, mivel másodfokúra redukálható negyedfokú egyenletről van szó:

$$x_{2,3,4,5} = \operatorname{arctg} \left(\pm \sqrt{\frac{30 \pm 5\sqrt{17}}{19}} \right).$$

3.2.10 Megoldás Az a_n a következőképpen írható:

$$\begin{aligned}a_n &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n},\end{aligned}$$

ugyanis, mint látjuk, az első és utolsó tényező kivételével minden tényező mellett annak reciproka is előfordul, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}.$$

3.2.11 Megoldás Mivel a_n minden n -re pozitív és

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot 5^n \cdot n!}{5^{n+1} \cdot (n+1)! n^n} = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{5}, \quad \text{ha } n > 1,$$

vagyis

$$a_{n+1} < \frac{3}{5} a_n < a_n,$$

tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő és alulról korlátos, ezért konvergens is. Legyen a határérték s (ahol tehát s nemnegatív véges érték). Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{(2n)^{2n}}{5^{2n} \cdot (2n)!} = \frac{4^n \cdot n^n \cdot n^n}{5^n \cdot 5^n \cdot 2n(2n-1) \dots (n+1) \cdot n!} = \\ &= \frac{4^n n^n}{5^n \cdot 2n(2n-1) \dots (n+1)} \cdot a_n. \end{aligned}$$

Viszont

$$\frac{4^n n^n}{5^n \cdot 2n(2n-1) \dots (n+1)} = \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \frac{n}{2n} \cdot \frac{n}{2n-1} \dots \frac{n}{n+1} < \left(\frac{4}{5}\right)^n,$$

ezért

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n a_n = s \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = s \cdot 0 = 0,$$

amiből ismert tétel alapján $a_n \rightarrow 0$ következik.

3.2.12 Megoldás Azonnal látjuk, hogy a gyököket csak a negatív számok között kereshetjük. Legyen

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}.$$

Ennek deriváltja:

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Két esetet vizsgálunk:

1. Ha n páros, akkor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty,$$

és $f'(x) = 0$ -nak egyetlen valós gyöke $x = -1$, így az $f(-1)$ függvényérték a folytonos $f(x)$ függvénynek helyi és egyben abszolút minimuma is. Mivel pedig

$$f(-1) = 1 - 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) > 0,$$

így az eredeti egyenletnek nincs valós gyöke.

2. Ha n páratlan, akkor

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

s ezért, mivel $f(x)$ folytonos, legalább egy zérushelye van. A függvénynek azonban csak egy zérushelye lehet, mert $f'(x)$ folytonos, egyetlen x esetén sem zérus, és mivel például $f(0) = 1$, így $f'(x) > 0$ minden x -re. Az $f(x)$ függvény tehát szigorúan monoton növekvő, így csak egy zérushelye lehet.

Az $f(x) = 0$ egyenletnek tehát egy valós gyöke van, ha $f(x)$ fokszáma páratlan, és nincs valós gyöke, ha $f(x)$ páros fokszámú.

3.2.13 Megoldás Az adott körszelethez tartozó húr hossza legyen $PQ = 2h$, a kör sugara r , középpontja O . A PQ húrta a rá merőleges átmérő messe E -ben. Egy olyan téglalap csúcsai, amelynek egyik oldala az adott húron nyugszik és másik két csúcsa a körön van, A, B, C, D . Az adott húrral párhuzamos BC oldalt az OE egyenes messe F -ben. Ha $OF = x$, akkor

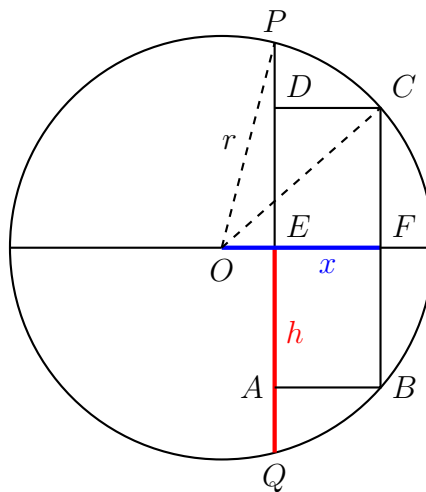
$$FC = \sqrt{r^2 - x^2}$$

és

$$EF = x - \sqrt{r^2 - h^2},$$

így a téglalap területe

$$T = 2 \left(x - \sqrt{r^2 - h^2} \right) \sqrt{r^2 - x^2}.$$



Ennek a $T(x)$ függvénynek kell meghatároznunk a maximumát. A $T(x)$ -nek ott lehet maximuma, ahol az első deriváltja 0-val egyenlő.

$$\begin{aligned} T'(x) &= 2\sqrt{r^2 - x^2} + 2 \left(x - \sqrt{r^2 - h^2} \right) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \\ &= \frac{2(r^2 - x^2) - 2x(x - \sqrt{r^2 - h^2})}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \\ &= \frac{2r^2 - 4x^2 + 2x\sqrt{r^2 - h^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2x^2 - x\sqrt{r^2 - h^2} - r^2}{-\frac{1}{2}\sqrt{r^2 - x^2}} \end{aligned}$$

akkor zérus, amikor a számláló az, megoldandó tehát a

$$2x^2 - x\sqrt{r^2 - h^2} - r^2 = 0$$

egyenlet.

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{r^2 - h^2} \pm \sqrt{r^2 - h^2 + 8r^2}}{4} = \frac{\sqrt{r^2 - h^2} \pm \sqrt{9r^2 - h^2}}{4}.$$

Mivel az

$$F(x) = 2x^2 - x\sqrt{r^2 - h^2} - r^2$$

függvény képe parabola, ezért az

$$x = \frac{\sqrt{r^2 - h^2} \pm \sqrt{9r^2 - h^2}}{4}$$

helyen a $T(x)$ -nek maximuma van. Az x_2 negatív gyök azt az esetet jelenti, amikor az F (s így a téglalap is) a húr másik oldalán van. Mivel x -szel az OF hosszúságát jelöltük, ezért e gyök abszolút értékét vesszük. A maximális terület x_1 esetén:

$$\begin{aligned} T_{max} &= 2 \left(\frac{\sqrt{r^2 - h^2} + \sqrt{9r^2 - h^2}}{4} - \sqrt{r^2 - h^2} \right) \sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{r^2 - h^2} + \sqrt{9r^2 - h^2}}{4} \right)^2} = \\ &= \frac{1}{8} \left(\sqrt{9r^2 - h^2} - 3\sqrt{r^2 - h^2} \right) \sqrt{6r^2 + 2h^2 - 2\sqrt{(r^2 - h^2)(9r^2 - h^2)}}. \end{aligned}$$

A másik esetben

$$|x_2| = \frac{\sqrt{9r^2 - h^2} - \sqrt{r^2 - h^2}}{4},$$

s a maximális terület ekkor:

$$T_{max} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{9r^2 - h^2} + 3\sqrt{r^2 - h^2} \right) \sqrt{6r^2 + 2h^2 + 2\sqrt{(r^2 - h^2)(9r^2 - h^2)}}.$$

3.2.14 Megoldás Írjuk át a sorozat n -edik elemét:

$$a_n = \sqrt[2n]{\frac{2n \cos^2 2n + 2n \sin^2 n + \sin^2 n}{2n}} = \sqrt[2n]{\frac{2n + \sin^2 n}{2n}}.$$

Mivel pedig

$$a_n = \sqrt[2n]{1 + \frac{\sin^2 n}{2n}} \geq 1$$

és

$$\sqrt[2n]{1 + \frac{\sin^2 n}{2n}} \leq \sqrt[2n]{1 + \frac{1}{2n}} < \sqrt[2n]{2},$$

ezért

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2} = 1,$$

vagyis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

3.2.15 Megoldás A gyökök és együtthatók összefüggése alapján

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = q$$

$$x_1 x_2 x_3 = -r,$$

és mivel feltétel szerint a gyökök mind pozitívak, ezért

$$p < 0; \quad q > 0; \quad r < 0.$$

A második egyenlőséget a harmadikkal osztva kapjuk:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{q}{r}.$$

Azt kell tehát csak belátnunk, hogy

$$-\frac{q}{r} < -\frac{p^2}{2r}.$$

Ebből $-2r$ (> 0)-rel való szorzás után

$$2q < p^2$$

adódik, ami viszont igaz, mert

$$\begin{aligned} 2q &= 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) < (x_1 + x_2 + x_3)^2 = p^2. \end{aligned}$$

3.2.16 Megoldás Alkalmazzuk a következő jelölést:

$$f(t) = \left(\frac{1 + \sqrt[t]{c}}{2} \right)^t,$$

ahol $c > 0$ és t tartson a végtelenhez. Végezzük el az alábbi átalakítást:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + \sqrt[t]{c}}{2} \right)^t &= \left[\frac{2 + (\sqrt[t]{c} - 1)}{2} \right]^t = \left(1 + \frac{\sqrt[t]{c} - 1}{2} \right)^t = \\ &= \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt[t]{c} - 1}} \right)^{\frac{2}{\sqrt[t]{c} - 1}} \right]^{\frac{t}{2}(\sqrt[t]{c} - 1)} = [g(t)]^{h(t)}. \end{aligned}$$

Mivel

$$\frac{2}{\sqrt[t]{c} - 1} \rightarrow \pm\infty$$

ha $t \rightarrow \infty$, aszerint, hogy $c > 1$ vagy $c < 1$, ezért

$$g(t) \rightarrow e,$$

s már csak $h(t)$ határértékét kell megvizsgálnunk. Írjuk $h(t)$ -t ilyen alakban:

$$h(t) = \frac{\sqrt[t]{c} - 1}{\frac{t}{2}},$$

s mivel itt mind a számláló, mind a nevező 0-hoz tart, alkalmazhatjuk rá L'Hospital szabályát. A számláló deriváltja:

$$(\sqrt[t]{c} - 1)' = -\frac{\sqrt[t]{c} \cdot \ln c}{t^2},$$

a nevezőé pedig

$$-\frac{2}{t^2},$$

így

$$\frac{\sqrt[t]{c} \cdot \ln c}{2} \rightarrow \frac{\ln c}{2} = \ln \sqrt{c},$$

tehát

$$[g(t)]^{h(t)} \rightarrow e^{\ln \sqrt{c}} = \sqrt{c}.$$

Az eredeti jelöléssel tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{x}.$$